Aufgabe 1: (5 Punkte)

a) Man berechne die Stammfunktionen zu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}.$$

b) Man berechne die unbestimmten Integrale durch Substitution

(i) $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

c) Man berechne das bestimmte Integral durch Substitution

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\,dx.$$

Lösung:

a) (1 Punkt)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}\,dx = 2\sqrt{x} - \frac{2}{x} + C$$

b) (i) (1 Punkt)

Die Substitution $u = x^3 + 1 \to du = 3x^2dx$ führt mit $\sqrt{u} = u^{1/2}$ auf

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2u^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C.$$

(ii) (1 Punkt)

Mit der Substitution $u = e^x + 1 \to du = e^x dx$ erhält man

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

c) (2 Punkte)

Die Substitution $u = \sin(x) \to du = \cos(x)dx$ ergibt

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\,dx = \int_0^1 u^2\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Berechnet werden soll das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}\,dx.$

Dazu führe man folgende Schritte durch.

a) Durch Polynomdivision zerlege man den Integranden in einen polynomialen und einen echt gebrochenrationalen Anteil.

b) Für den echt gebrochenrationalen Anteil aus a) führe man eine Partialbruchzerlegung durch.

   Hinweis: Es gilt $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

c) Man berechne das unbestimmte Integral unter Verwendung von a) und b).

Lösung:

a) (1 Punkt)

   Polynomdivision

$$\begin{array}{rl} (x^2-4x+6) & :(x^2-5x+4) = 1 + \dfrac{x+2}{x^2-5x+4} \\ -(x^2-5x+4) & \\ \hline x+2 & \end{array}$$

b) (2 Punkte)

   Partialbruchzerlegungsansatz $\displaystyle\frac{x+2}{x^2-5x+4}=\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}$

$$\Rightarrow \quad x+2=A(x-4)+B(x-1)$$

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 3=-3A \quad \Rightarrow \quad A=-1$$

$$x=4 \quad \Rightarrow \quad 6=3B \quad \Rightarrow \quad B=2$$

c) (1 Punkt)

$$\int \frac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}\,dx=\int 1-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-4}\,dx=x-\ln|x-1|+2\ln|x-4|+C$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von

$$f \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = xe^x$$

um die $x-$Achse rotiert.

Lösung:

$$\begin{aligned}
V_{x-\text{Achse}} &= \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 \, dx = \pi \int\limits_0^1 (xe^x)^2 \, dx = \pi \int\limits_0^1 x^2 e^{2x} \, dx \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 xe^{2x} \, dx \right) \\
&= \pi \left(\left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} xe^{2x} \right) \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \right) \\
&= \pi \left(\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (3 + 2 Punkte)

a) Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+\sqrt{n}}$.

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_3 verwendet?

b) Man bestimme das offene Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n+1)}(x-1)^n.$$

Für $x = \frac{8}{5}$ untersuche man das Konvergenzverhalten der Reihe (mit Begründung).

Lösung:

a) (i) (2 Punkte)
Es handelt sich um eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, denn es gilt:

$a_n = \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n}} \geq 0,$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1+1/n+1/\sqrt{n}} = 0,$

a_n fällt monoton, denn $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+2+\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n}} = a_n$.

(ii) (1 Punkt)
Aus der Fehlerabschätzung des Leibniz-Kriteriums erhält man

$$|S - S_3| \leq a_4 = \frac{1}{4+1+\sqrt{4}} = \frac{1}{7}\,.$$

b) (2 Punkte)
Mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und dem Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n}{3^n(n+1)} \cdot \frac{3^{n+1}(n+2)}{5^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+2)}{5(n+1)} = \frac{3}{5}$$

erhält man das offene Konvergenzintervall $]x_0 - r, x_0 + r[= \left]\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\right[$.

Für $x = \frac{8}{5}$ erhält man $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n+1)} \left(\frac{8}{5} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

die harmonische Reihe, also keine Konvergenz.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Für die Stützstellen

x_i	-1	1	2
y_i	3	-1	$0\,.$

berechne man die Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms $p_2(x)$ mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

Lösung:

Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$
\begin{array}{r|llll}
-1 & \boxed{3} & & & \\
 & & & & \\
1 & -1 & \dfrac{-1-3}{1-(-1)} = \boxed{\text{-2}} & & \\
 & & & & \\
2 & 0 & & \dfrac{0-(-1)}{2-1} = 1 & \dfrac{1-(-2)}{2-(-1)} = \boxed{1}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = 3 - 2(x+1) + (x+1)(x-1)$$