Aufgabe 1: (3 Punkte)

a) Man berechne die Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{4}{x^3} - 5\cos(x).$$

b) Man berechne die unbestimmten Integrale

(i) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\, dx,$

(ii) $\displaystyle\int 10\cos(x)\sin^4(x)\, dx.$

Lösung:

a) (1 Punkt)
$$\int \frac{4}{x^3} - 5\cos(x)\, dx = -\frac{2}{x^2} - 5\sin(x) + C$$

b) (i) (1 Punkt)
Mit zweimaliger partieller Integration erhält man:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

(ii) (1 Punkt)
Die Substitution $u = \sin(x) \;\rightarrow\; du = \cos(x)dx$ führt auf

$$\int 10\cos(x)\sin^4(x)\, dx = \int 10u^4\, du = 2u^5 + C = 2\sin^5(x) + C.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

a) Man berechne das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx.$

b) Man berechne das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^2-4x}\,dx.$

Lösung:

a) (2 Punkte)
Durch Substitution $t = x/2 \;\to\; dt = dx/2$ erhält man

$$\int \frac{2}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan(t)+C = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

b) (3 Punkte)
Partialbruchzerlegungsansatz $\displaystyle\frac{x-8}{x^2-4x} = \frac{x-8}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}$

$$\Rightarrow \quad x - 8 = A(x-4) + Bx$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad -8 = -4A \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad -4 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x-8}{x^2-4x}\,dx = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x-4}\,dx = 2\ln|x| - \ln|x-4| + C$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

a) Man berechne das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$, falls es existiert.

b) Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{4^k}$.

c) Man untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$ auf Konvergenz.

Lösung:

a) (1 Punkt)

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+} \int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+} 2\sqrt{x-2}\Big|_a^3 = \lim_{a\to 2+} 2(1-\sqrt{a-2}) = 2$$

b) (1 Punkt)

Mit der Summenformel der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{3^k}{4^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{1-3/4} = 6$$

c) (1 Punkt)

Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$ mit $a_n = \dfrac{3^n}{n^5}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n^5}{(n+1)^5 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = 3\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n}\right)^5 = 3 > 1.$$

Damit divergiert die Reihe.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{1}{5-2x}$ definierte Funktion.

a) Man berechne die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$,

b) bestimme das offene Konvergenzintervall und

c) untersuche die Konvergenz der Reihe im Punkt $x = 5/2$.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$$f(x) = \frac{1}{5-2x} = f(x) = \frac{1}{3-2(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2(x-1)/3}$$

Für $\left|\dfrac{2(x-1)}{3}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \dfrac{3}{2} = r$ (Konvergenzradius)
gilt mit der geometrischen Summenformel

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2(x-1)/3} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k (x-1)^k.$$

b) (1 Punkt)

offenes Konvergenzintervall: $]x_0 - r, x_0 + r[= \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right[$

c) (1 Punkt)

Im Punkt $x = \dfrac{5}{2}$ (Polstelle von f und Randpunkt des Konvergenzintervalls) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{5}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}.$$

Diese Reihe divergiert, denn mit $a_k = \dfrac{1}{3}$ ist die notwendige Konvergenzbedingung $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ nicht erfüllt, denn $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\ :]0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - x$.

a) Man zeichne die 2-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-4, 4]$.

b) Man berechne die Fourier-Reihe dieser 2-periodischen Fortsetzung.

c) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe für $x = 2$?

Lösung:

a) (1 Punkt)

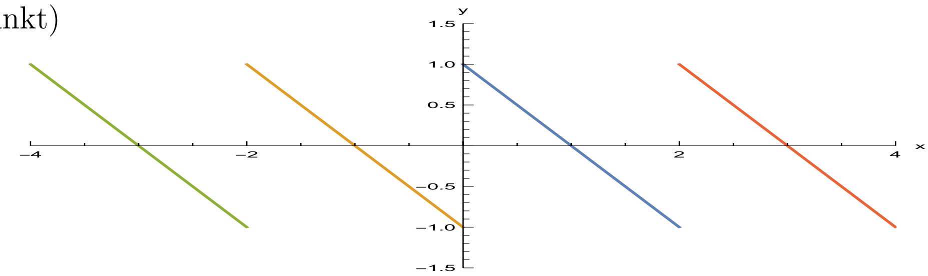

Bild 5 a): 2-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f in $[-4, 4]$

b) (3 Punkte)

Da die Fortsetzung von f ungerade ist, gilt $a_k = 0$.

Mit der Periode $T = 2$ und $\omega = 2\pi/T = \pi$ erhält man

$$b_{k\geq 1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)\, dx = 2 \int_0^1 (1-x) \sin(k\pi x)\, dx$$

$$= 2 \left\{ -\frac{(1-x)\cos(k\pi x)}{k\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos(k\pi x)\, dx \right\} = \frac{2(x-1)\cos(k\pi x)}{k\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{k\pi}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe $F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi x)$.

c) (1 Punkt)

In der Sprungstelle $x = 2$ gilt: $F_f(2) = \frac{f(2+) + f(2-)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$

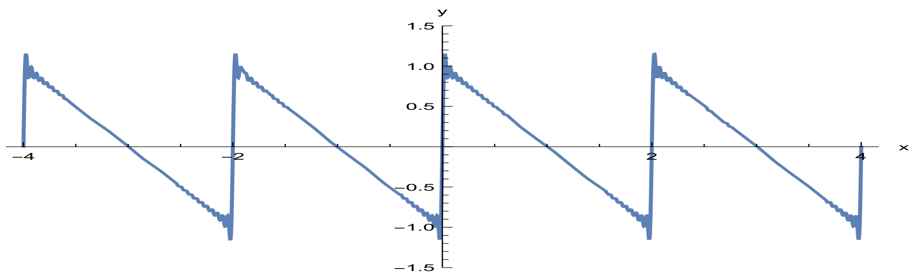

Bild 5 b): Partialsumme S_{40} (ohne Wertung)