Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

(i) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^3+x^2}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$,

b) Mit Hilfe des Integral-Kriteriums für Reihen zeige man, dass für $\alpha > 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

absolut konvergiert.

c) Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k}+3^{k+2}}{9^{k+1}}$.

Lösung:

a) (i) Das Integral konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt $|\sin x| \le 1$ und für $x \ge 1$ gilt $x^3 \ge x^2$:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^3+x^2}\right| dx &= \lim_{a\to\infty}\int\limits_1^a \frac{|\sin x|}{x^3+x^2}\,dx \le \lim_{a\to\infty}\int\limits_1^a \frac{1}{x^2+x^2}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2x}\bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

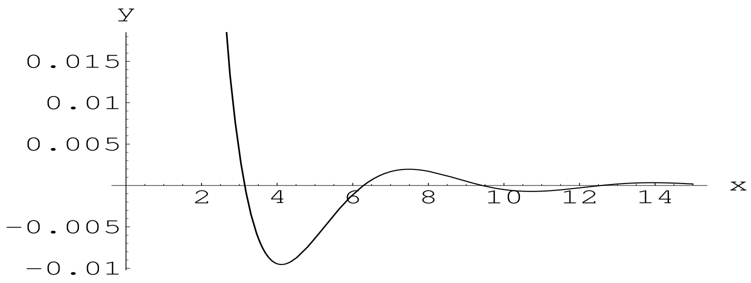

Bild 17 a) (i): Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 + x^2}$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx = \int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx + \int_2^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$ ist ein bestimmtes Integral mit endlichem Wert.

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$ ist ein uneigentliches Integral.

Für $x \geq 2$ gilt: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^3+8}} \geq \dfrac{x}{\sqrt{x^3+x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ und man erhält

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx \geq \lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \sqrt{2x}\Big|_2^a = \lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{2a}-2\right) = \infty\end{aligned}$$

Damit divergiert das Ausgangsintegral nach dem Minorantenkriterium.

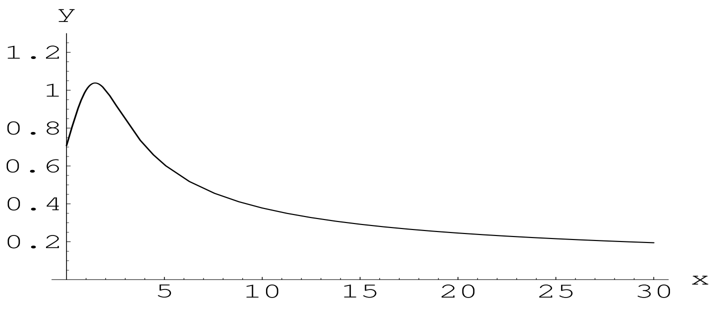

Bild 17 a) (ii): Funktion $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^3+8}}$

b) Für $\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha - 1$ und $x > 0$ fällt die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ (streng) monton und es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx &= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\bigg|_1^a \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha-1}\,. \end{aligned}$$

Das Integral konvergiert also absolut. Nach dem Integral-Kriterium für Reihen besitzt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ das gleich Konvergenzverhalten.

c) Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} + 3^{k+2}}{9^{k+1}} &= \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{9^k} + \frac{3^2}{9}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{9^k} = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-4/9} + \frac{1}{1-1/3} = \frac{17}{10}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

c) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01 ?

d) Wie lauten die ersten zwei Nachkommastellen des Grenzwertes S ?

Lösung:

a) Es handelt sich um eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, denn es gilt:

(i) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geq 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{\sqrt{1+3/n^2}} = 0$

(iii) a_n fällt monoton, denn $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.

b) Aus der Fehlerabschätzung des Leibniz-Kriteriums erhält man

$$|S - S_0| \leq a_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+3}} = \frac{1}{2} .$$

c) Man verlangt für die Abschätzung des Wertes S der Reihe durch die Partialsummen S_k

$$|S - S_k| \leq a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+3}} \overset{!}{<} 0.01 .$$

Aus $a_{99} = 0.0100995$ und $a_{100} = 0.0099985$ erhält man $k \geq N = 99$. Die Partialsummenwerte lauten $S_{99} = 0.28821$ und $S_{100} = 0.298208$.

d) Mit dem Mathematica-Befehl

```
NSum[(-1)^n/Sqrt[n^2 + 3], {n, 0, k}]
```

berechnet man die Partialsummen und erhält

$$S_{155} = 0.290019 \leq S \leq S_{74} = 0.299943$$

Für den Grenzwert bedeutet dies $S = 0.29\cdots$.

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k2^k}$,

c) $\displaystyle\frac{4}{6}+\frac{8}{11}+\frac{12}{16}+\frac{16}{21}+\frac{20}{26}+\cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Lösung:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn mit

$\displaystyle a_n=\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n}{4+5/n}=\frac{3}{4}<1.$$

b) Nach dem Quotientenkriterium ergibt sich für $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k2^k}$ mit $\displaystyle a_k=\frac{3^k}{k2^k}$

Divergenz, denn

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}k2^k}{3^k(k+1)2^{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k}{2(k+1)}=\frac{3}{2}>1.$$

c) $\displaystyle\frac{4}{6}+\frac{8}{11}+\frac{12}{16}+\frac{16}{21}+\frac{20}{26}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{5n+1}$

konvergiert nicht, da $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{5n+1}=\frac{4}{5}\neq 0\,.$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{n^2-1}}_{=a_n}$

konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$|a_n|=\left|\frac{2}{n^2-1}\right|=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n-1}\leq\frac{2}{(n-1)^2}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}<\infty.$$

Aufgabe 20:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}\,,$

(ii) $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) = \dfrac{n}{n + 1 + nx^2}\,,$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^k}\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}\,.$$

Lösung:

a) (i) Mit Hilfe der Konvergenzaussage über geometrische Folgen erhält man punktweise Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ |x| < 1 \\ 1/3 & : \ |x| = 1 \\ 1 & : \ |x| > 1\,. \end{cases}$$

f_n konvergiert nicht gleichmäßig, da f unstetig ist.

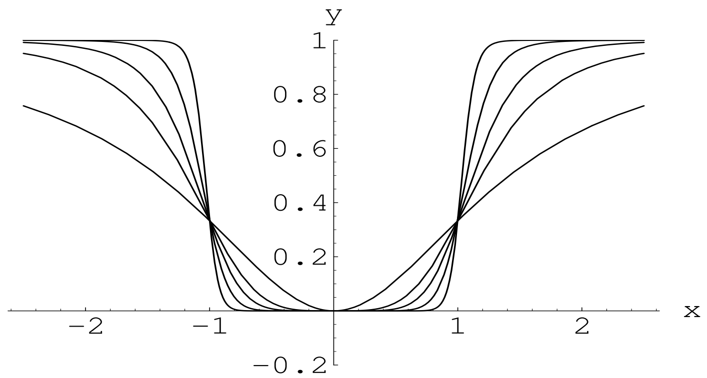

Bild 20 a) (i) $\quad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}$ mit $n = 1, 2, 3, 5, 10$

(ii) Die Folge g_n konvergiert punktweise gegen g:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2+1/n} = \frac{1}{1+x^2} =: g(x) .$$

g_n konvergiert auch gleichmäßig gegen g, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x)-g(x)| &= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{1+x^2+1/n} - \frac{1}{1+x^2} \right| \\ &= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{-1/n}{(1+x^2+1/n)(1+x^2)} \right| \\ &\le \sup_{x\in[-1,1]} \frac{1}{n}\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

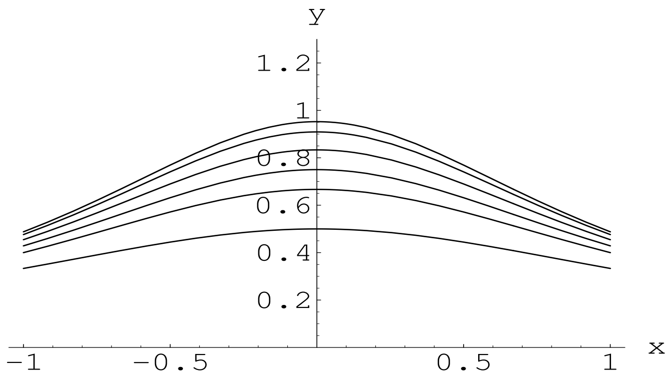

Bild 20 a) (ii)) $\quad g_n(x) = \dfrac{n}{n+1+nx^2}$ mit $n = 1, 2, 3, 6, 10, 20$

b) (i) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^k}$ kann nur für $x \ge 0$ definiert werden.

Für die Partialsummen $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^k}$ erhält man:

$S_n(0) = 0$ und für $x > 0$ nach der geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sqrt{x} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)^k = \sqrt{x} \cdot \frac{1-(1/(1+\sqrt{x}))^{n+1}}{1-1/(1+\sqrt{x})} \\ &= 1+\sqrt{x} - (1/(1+\sqrt{x}))^n \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge S_n konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ 1+\sqrt{x} & : \ x \in]0,\infty[\, . \end{cases}$$

Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein.

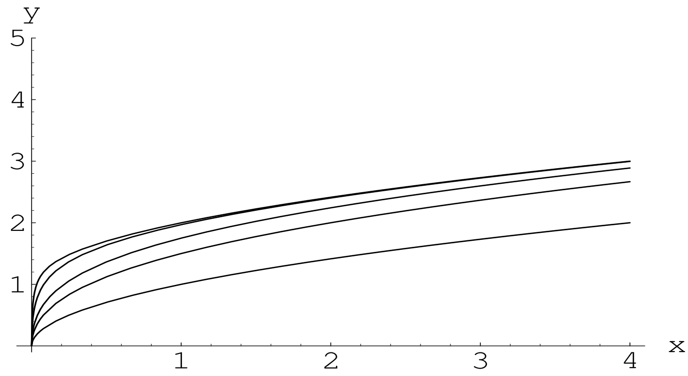

Bild 20 b) (i) $\quad S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^k}$ für $n = 0, 1, 2, 5, 10$

(ii) $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+x^2}$ konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) und absolut nach dem Majorantenkriterium auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{1}{k^2+x^2}\right| = \frac{1}{k^2+x^2} \le \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty\,.$$

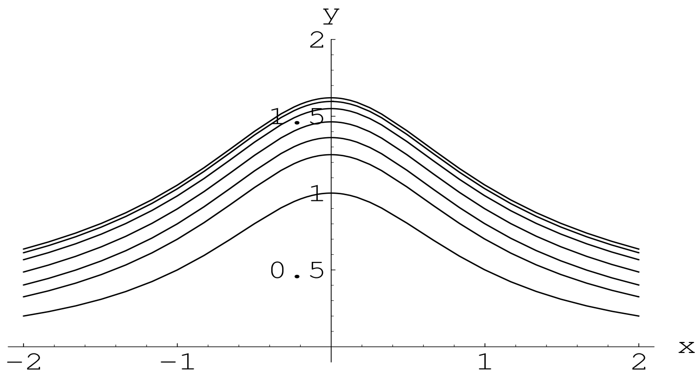

Bild 20 b) (ii) $\quad S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+x^2}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20, 40$

Besprechungstermine: 9.6. - 11.6.21