Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

Definition:

Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ heißt **absolut konvergent**, falls $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.

Satz: **Konvergenzkriterien** für uneigentliche Integrale $\int\limits_a^b f(x)dx$

a) Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

b) **Majorantenkriterium**: Gilt für alle x: $|f(x)| \leq g(x)$, dann gilt:

$$\int\limits_a^b g(x)dx \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{absolut konvergent}\,.$$

c) **Minorantenkriterium**: Gilt für alle x: $0 \leq g(x) \leq f(x)$, dann gilt:

$$\int\limits_a^b g(x)dx \quad \text{divergent} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{divergent}\,.$$

Reihen

Definition:

a) Die aus einer reell- oder komplexwertigen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Folge von **Partialsummen** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

heißt **Reihe** und wird mit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

b) Im Falle der **Konvergenz**, d.h. falls

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

existiert, nennt man S auch **Wert der Reihe**.

c) Konvergiert die Folge der Partialsummen nicht, so heißt die Reihe **divergent**.

Beispiele:

a) Partialsummenformel für die **geometrische Summe** $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

b) **divergente Reihen**

(i) **harmonische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^r}$ für $r \le 1$,

(iii) **geometrische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| \ge 1$,

c) **konvergente Reihen**

(i) **alternierende harmonische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^r}$ für $r > 1$, z.B.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}\,,$$

(iii) **geometrische Reihe** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$,

(iv) **Exponentialreihe** $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Definition: **(Absolute Konvergenz)**

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Folgerungen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt.

b) Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

Satz: **(Integral-Kriterium für Reihen)**

Ist $f(x)$ auf dem Intervall $[m, \infty[$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ positiv und monoton fallen, so besitzen

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \quad \text{und} \quad \int_m^{\infty} f(x)\, dx$$

das gleiche Konvergenzverhalten.

Aufgabe 17:

a) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx\,,$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx\,,$

b) Mit Hilfe des Integral-Kriteriums für Reihen zeige man, dass für $0 < \alpha \leq 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

divergiert.

c) Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}}$.

Lösung:

a) (i) $$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$

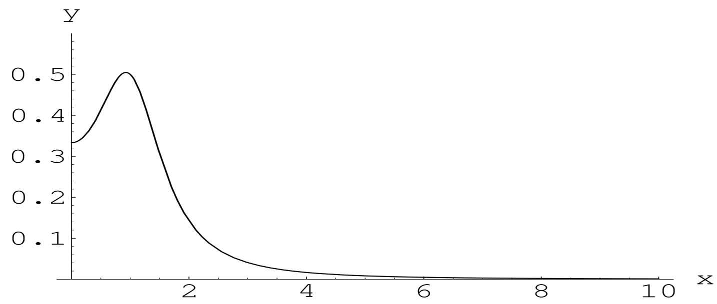

Bild 17 a): Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5+3}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$ ist ein bestimmtes Integral mit endlichem Wert.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$ ist ein uneigentliches Integral.

Für $x \geq 1$ gilt $\displaystyle 0 \leq \frac{x^2+1}{x^5+3} \leq \frac{x^2+x^2}{x^5} = \frac{2}{x^3}$ und man erhält

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \le \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{2}{x^3}\,dx\\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x^2}\bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a^2}\right) = 1\end{aligned}$$

Damit konvergiert das Ausgangsintegral absolut nach dem Majoranten-kriterium.

(ii) Das Integral divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn für $0 \le x \le 1$ gilt $x^{7/2} \le x^{5/2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}\,dx &= \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{7/2}+x^{5/2}}\,dx \ge \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{5/2}+x^{5/2}}\,dx\\ &= \lim_{a\to 0} -\frac{1}{3x^{3/2}}\bigg|_a^1 = \lim_{a\to 0}\frac{1}{3a^{3/2}} - \frac{1}{3} = \infty\,.\end{aligned}$$

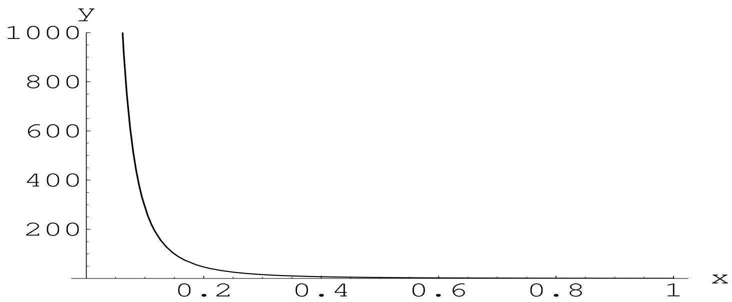

Bild 17 a)(ii): Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^4+x^3}$

b) Für $0 < \alpha \le 1$ und $x > 0$ fällt die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ (streng) monton und es gilt

1. Fall:: $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \ln x|_1^a = \lim_{a\to\infty}\ln a = \infty\,,$$

2. Fall: $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < 1-\alpha$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\bigg|_1^a\\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} = \infty\,.\end{aligned}$$

Das Integral divergiert also für $0 < \alpha \le 1$. Nach dem Integral-Kriterium für Reihen besitzt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$ das gleich Konvergenzverhalten.

c) Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot\frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} = 4\cdot\frac{2}{3^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-2/3}-1\right) = \frac{16}{9}\,.$$

Rechenregeln und Konvergenzkriterien für Reihen

Satz: **(Rechenregeln für konvergente Reihen)**

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, dann gilt:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k$,

b) $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz: **(Kriterien für Konvergenz)**

a) **notwendige Bedingung**: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

b) **Leibnizsches Kriterium**:

Gegeben sei die **alternierende Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k,\quad$ mit $a_k \geq 0$.

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe.

Der Wert $S := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ der Reihe wird dann durch die Partialsummen S_i folgendermaßen eingeschlossen:

$$S_1 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_{2m-1} \leq \ldots \leq S \leq \ldots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_2 \leq S_0 .$$

Diese Einschließung ergibt die Fehlerabschätzung

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} ,$$

denn

$$|S - S_{2n-1}| \leq |S_{2n} - S_{2n-1}| = a_{2n} \quad \text{und} \quad |S - S_{2n}| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = a_{2n+1} .$$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right)$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k=\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+3}\right)$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.001?

c) Wie lauten die ersten drei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Lösung:

a) Es handelt sich um eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, denn es gilt:

(i) $a_n := \dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)} \geq 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1/n^2}{1+5/n+6/n^2} = 0$

(iii) a_n fällt monoton, denn

$$\begin{aligned}
& & 0 &\leq n \\
\Rightarrow\ & (n+2)^2 = n^2+4n+4 &&\leq n^2+5n+4=(n+1)(n+4) \\
\Rightarrow\ & \frac{n+2}{n+4} &&\leq \frac{n+1}{n+2} \\
\Rightarrow\ & a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} &&\leq \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = a_n\ .
\end{aligned}$$

b) Man verlangt für die Abschätzung des Wertes S der Reihe durch die Partialsummen S_k

$$|S-S_k| \leq a_{k+1} = \frac{k+2}{(k+3)(k+4)} \overset{!}{<} 0.001\ .$$

Aus $a_{995} = 0.001001$ und $a_{996} = 0.000999998$ erhält man $k \geq N = 995$. Die Partialsummenwerte lauten $S_{995} = 0.0789413$ und $S_{996} = 0.0799413$.

c) Mit dem Mathematica-Befehl

```
NSum[(-1)^n*(n + 1)/(n^2 + 5 n + 6), {n, 0, k}]
```

berechnet man die Partialsummen und erhält

$$S_{1129} = 0.0790004 \leq S \leq S_{892} = 0.07999930$$

Für den Grenzwert bedeutet dies $S = 0.079\cdots$.

Absolut konvergente Reihen

Satz: **(Kriterien für absolute Konvergenz)**

Gegeben seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

a) Es gelte $|a_k| \leq b_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$:

Majorantenkriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut.}$$

Minorantenkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$.

b) **Quotientenkriterium**: Es gelte $a_k \neq 0$:

(i) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert.

c) **Wurzelkriterium**:

(i) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert.

Aufgabe 19:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$,

c) $\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\frac{9}{64}+\frac{27}{128}+\frac{81}{256}+\cdots$, d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}$.

Lösung:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn mit $a_n=\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}=\frac{1}{2}<1$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1\,.$$

c) Die Reihe konvergiert nicht, denn mit der geometrischen Summenformel erhält man

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\frac{9}{64}+\frac{27}{128}+\frac{81}{256}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^k}_{=a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16}\cdot\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-3/2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left((3/2)^{n+1}-1\right)=\infty$$

Alternative Begründung:

Die notwendige Konvergenzbedingung für Reihen ist nicht erfüllt

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\infty\neq 0\,.$$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium, denn es gilt

$$a_k=\frac{k+1}{k^2+1}\geq\frac{k+1}{k^2+k}=\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+1}\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$$

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition:

a) Unter einer **Funktionenfolge** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Abbildung der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & V \\ n & \mapsto & f_n \end{array} .$$

V sei der Vektorraum, der die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ enthält, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** auf I gegen eine Funktion f, falls für jedes fest gewählte $x \in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** auf I gegen eine Funktion f, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Satz:

Sind alle Funktionen f_n auf dem Intervall I stetig und konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Definition:

a) Die aus einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Folge von **Partialsummen** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

heißt **Funktionenreihe** und wird mit $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ bezeichnet.

b) Die Begriffe **punktweise** und **gleichmäßige Konvergenz** übertragen sich auf die Funktionenreihe, wenn sie für die Funktionenfolge der Partialsummmen $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gelten.

Satz:

a) **Stetigkeit der Grenzfunktion**

Sind alle Funktionen $f_k(x)$ stetig und konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegen die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) ,$$

dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.

b) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

Gegeben seien die Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Gibt es für alle $k \geq 0$ Konstanten $M_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{für alle } x \in I : \quad |f_k(x)| \leq M_k$$

und konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig und absolut auf I.

Aufgabe 20:

a) Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{(i)} \quad f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{x^2}} , \quad \text{(ii)} \quad h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2} .$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k , \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)^3 (x^{2k} + 1)} .$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Lösung:

a) (i) Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen f:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + ne^{x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n + e^{x^2}} = 0 =: f(x) .$$

f_n konvergiert auch gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \sup_{x\in[-2,2]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[-2,2]} \left|\frac{1/n}{1/n + e^{x^2}} - 0\right| = \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n}\left|\frac{1}{1/n + e^{x^2}}\right| \\ &\le \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n}\left|\frac{1}{e^{x^2}}\right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

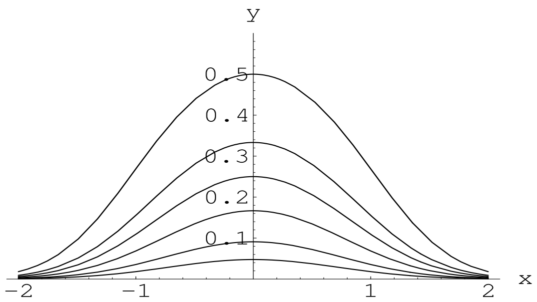

Bild 20 a) (i) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + ne^{x^2}}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

(ii) Es gilt $h_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1 + nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1/n + x^2} = 1 .$$

Also konvergiert die Folge h_n punktweise gegen h:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ 1 & : \ x \neq 0 \end{cases} .$$

h_n konvergiert nicht gleichmäßig, da h unstetig ist.

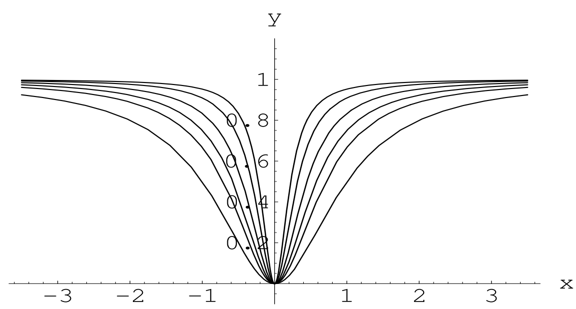

Bild 20 a) (ii) $h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx^2}$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

b) (i) Für $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k$ ergibt die geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^3 - 1) \sum_{k=0}^{n} (2 - x^3)^k = (x^3 - 1)\frac{1 - (2 - x^3)^{n+1}}{1 - (2 - x^3)} \\ &= 1 - (2 - x^3)^{n+1} \end{aligned}$$

Für $|2-x^3| < 1 \Leftrightarrow 1 < x^3 < 3$ erhält man Konvergenz mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Außerdem gilt $f_n(1) = 0$. Für alle anderen x liegt Divergenz vor. Die Funktionenfolge f_n konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 1 \\ 1 & : \quad 1 < x < \sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

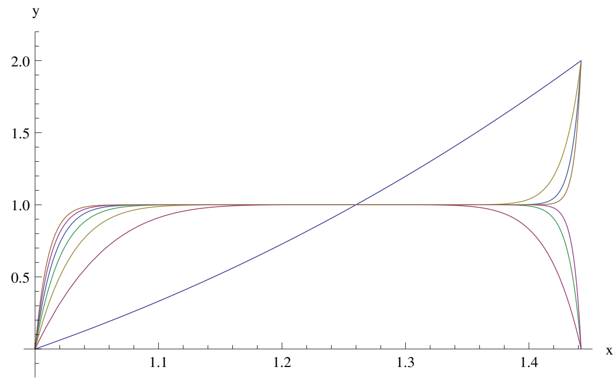

Bild 20 b) (i) $\quad f_n(x) = 1 - \big(2 - x^3\big)^{n+1}$ für $n = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$

Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein.

(ii)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$$

konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) und absolut nach dem Majorantenkriterium auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\left| \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)} \right| \leq \frac{1}{(k+1)^3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty\,.$$

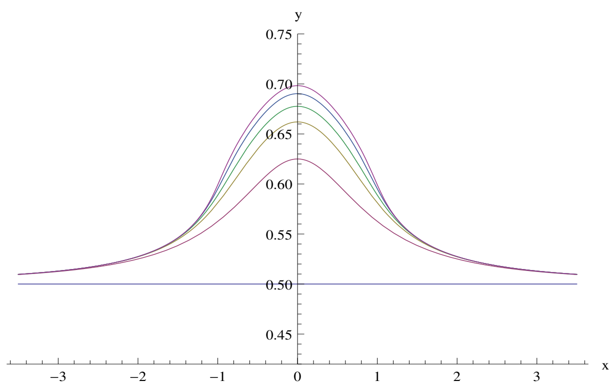

Bild 20 b) (ii) $\quad g_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 5, 10$