Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Satz:

Gegeben seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ und integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

a) **Linearität**

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

b) **Monotonie**

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx\,, \quad \text{falls } f(x) \leq g(x),$$

c) $$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

d) $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

e) Speziell wird definiert:

$$\int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx := 0\,.$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

a) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \; .$$

Integrationsregeln

Satz: Partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx \; .$$

Satz: Substitutionsregel

Die Funktion $g : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig differenzierbar, es existiere die Umkehrfunktion g^{-1} zu g und die stetige Funktion $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ besitze die Stammfunktion F, dann gilt

a)
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$
$$= F(g(t))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))\,,$$

b)
$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)\,dt = \tilde{F}(t)\Big|_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)}$$
$$= \tilde{F}(g^{-1}(d)) - \tilde{F}(g^{-1}(c)) = F(d) - F(c)\,.$$

Merkregel:

a) $t = g^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(t) \quad \Rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \leftrightarrow \quad dx = g'(t)dt$$

b) $c = g(t_a)\,,\ d = g(t_b) \quad \Rightarrow \quad t_a = g^{-1}(c)\,,\ t_b = g^{-1}(d)$

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx$

Substitution: $\quad t = e^x \;\Leftrightarrow\; x = \ln t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx = \int \frac{P(t)}{t \cdot Q(t)}\,dt\,.$$

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,dx$

Die Substitution:

$$t = \tan\frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 2\arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1}$$

ergibt nach kurzer Rechnung $(*)$:

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

und führt damit auf den Standardfall:

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,dx = \int \frac{2 \cdot P\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}{(t^2+1) \cdot Q\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}\,dt\,.$$

Zur kurzen Rechnung $(*)$:

$$\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2\tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin x$$

$$\frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \cos x$$

Aufgabe 13:

Man berechne die folgenden bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}dx$ unter Verwendung der Substitution $t = e^x$,

$$t = e^x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{t}\,, \quad t_0 = e^0 = 1\,, \quad t_1 = e^{\ln(2)} = 2$$

$$\int\limits_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx \;=\; \int\limits_1^{2} \frac{t^3}{t^3+4}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_1^{2} \frac{3t^2}{t^3+4}\,dt \;=\; \frac{1}{3}\ln(t^3+4)\Big|_1^2 \;=\; \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right)$$

alternativ Rücksubstitution und alte Grenzen:

$$\int\limits_0^{\ln(2)} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\,dx \;=\cdots=\; \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+4)\Big|_0^{\ln(2)}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{12}{5}\right) \;=\; 0.2918229...$$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx$ unter Verwendung der Substitution $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

$$\tan \frac{x}{2} = t \,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \,, \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1},$$

$$t_0 = \tan(0) = 0 \,, \quad t_1 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx \;&=\; \int\limits_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{t^2+1}} \frac{2dt}{t^2+1} \\
&=\; \int\limits_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2}{1-t^2}\, dt \;=\; \int\limits_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\, dt \\
&=\; \left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right)\Big|_0^{\tan(\pi/8)} \\
&=\; \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|
\end{aligned}$$

alternativ Rücksubstitution und alte Grenzen:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx = \cdots = \left(\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = 0.8813735...$$

Aufgabe 14:

a) Man berechne den Flächeninhalt F_1,
der sich im Intervall $[-3, 3]$ zwischen x-Achse und
der durch $y = x^2 - 4$ gegebenen Funktion befindet.

Schnittpunkte von $y = x^2 - 4$ mit der x-Achse:
$0 = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{-3}^{-2} x^2 - 4\,dx - \int_{-2}^{2} x^2 - 4\,dx + \int_{2}^{3} x^2 - 4\,dx \\ &= 2\int_{2}^{3} x^2 - 4\,dx - 2\int_{0}^{2} x^2 - 4\,dx \\ &= 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 - 2\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 \\ &= 2\left(\frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8\right) = \frac{46}{3} \end{aligned}$$

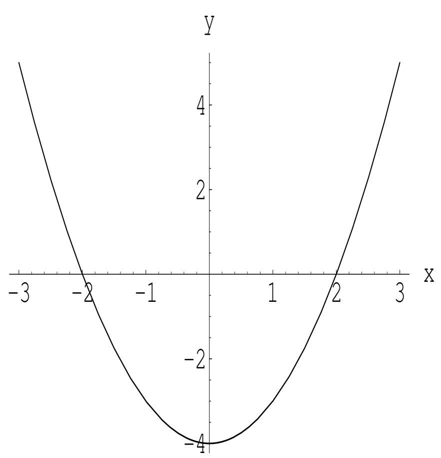

Bild 14 a): $y = x^2 - 4$ in $[-3, 3]$

b) Man berechne den Flächeninhalt F_2, der Menge des $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ eingeschlossen wird.

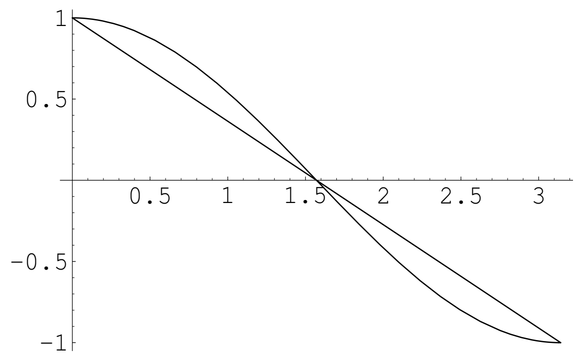

Bild 14 b): Menge M_2

Die Schnittpunkte von $f(x) = \cos x$ und $g(x) = 1 - 2x/\pi$ sind gegeben durch

$$x_1 = 0,\ x_2 = \pi/2,\ x_3 = \pi\ .$$

Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos x - (1 - 2x/\pi)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - 2x/\pi) - \cos x\, dx \\ &= 2\left[\sin x - x + x^2/\pi\right]_0^{\pi/2} = 2\,(1 - \pi/2 + \pi/4) \\ &= 2 - \pi/2\ . \end{aligned}$$

Rotationskörper

Gegeben sei die Funktion f mit

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

Bei Rotation des Funktionsgraphen von f um die x-Achse erhält man

a) **Volumen eines Rotationskörpers**,

$$V_{x-\text{Achse}} = \pi \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

b) **Mantelfläche eines Rotationskörpers**

$$M_{x-\text{Achse}} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Entsprechend erhält man das Volumen eines Rotationskörpers bei **Rotation** von f **um die y-Achse**

$$V_{y-\text{Achse}} = \pi \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy\,.$$

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Funktion

$$f \, : \, [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3 \, .$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

$$\begin{aligned} V_{x-\text{Achse}} &= \pi \int\limits_0^2 \left(f(x)\right)^2 \, dx = \pi \int\limits_0^2 \left(x^3\right)^2 \, dx \\ &= \pi \left(\frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{128\pi}{7} = 57.4462\ldots \end{aligned}$$

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

$$y = f(x) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$$

$$\begin{aligned} V_{y-\text{Achse}} &= \pi \int\limits_0^8 \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy = \pi \int\limits_0^8 \left(y^{1/3}\right)^2 \, dy \\ &= \pi \left(\frac{3y^{5/3}}{5} \right) \Bigg|_0^8 = \frac{96\pi}{5} = 60.3185\ldots \end{aligned}$$

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

Die Oberfläche des Rotationskörpers setzt sich zusammen aus der Mantelfläche $M_{x-\text{Achse}}$ und der Fläche K des seitlich begrenzenden Kreises:

$$K = 8^2\pi = 64\pi = 201.0619\ldots$$

$$\begin{aligned}
M_{x-\text{Achse}} &= 2\pi \int_0^2 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \\
&= 2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx \\
&\overset{t=1+9x^4}{=} \frac{2\pi}{36}\int_1^{145} \sqrt{t}\,dt = \left(\frac{2\pi\cdot 2}{36\cdot 3}t^{3/2}\right)\Bigg|_1^{145} \\
&= \frac{\pi}{27}(145^{3/2}-1) = 203.0436\ldots
\end{aligned}$$

Damit besitzt der Rotationskörper eine Oberfläche von

$$O = K + M_{x-\text{Achse}} = \frac{\pi(1727+145^{3/2})}{27} = 404.1055\ldots$$

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper.

Für den Flächenplot muss der Vektor des Funktionsgraphen

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq x \leq 2$ und $f(x) = x^3$ zunächst in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, also auf

$$\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erweitert werden.

Anschließend wird $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ multipliziert, wobei eine ganze Umdrehung durch $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ erreicht wird.

Für die Drehung um die x-Achse erhält man damit die folgende Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ x^3\cos\varphi \\ x^3\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 a) lautet damit:

```
ezsurf('x','cos(p)*x^3','sin(p)*x^3',[0,2*pi,0,2])
```

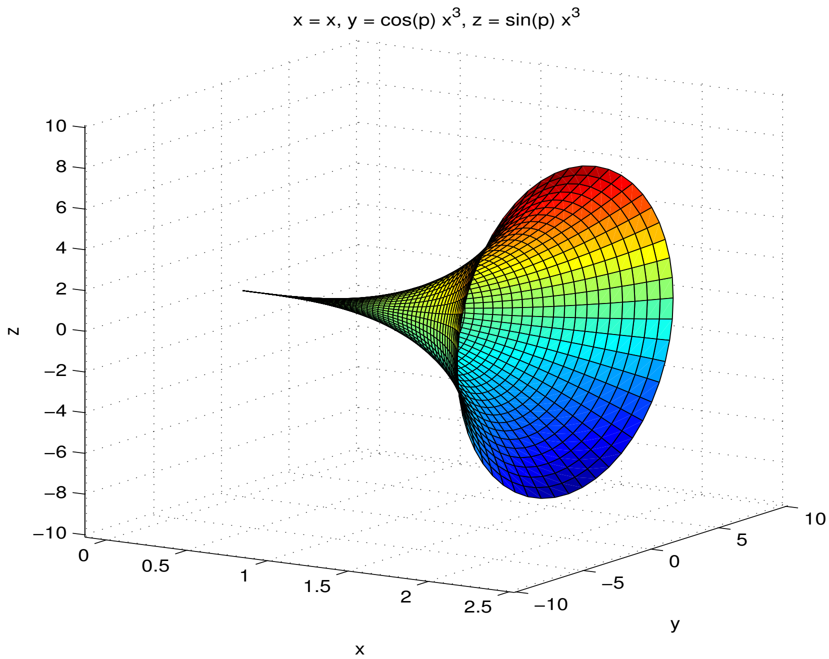

Bild 15 a): Rotationskörper für $f(x) = x^3$ bzgl. der x-Achse

$$\boldsymbol{u}_{y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x^3 \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 15 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','x^3','x*sin(p)',[0,2*pi,0,2])
```

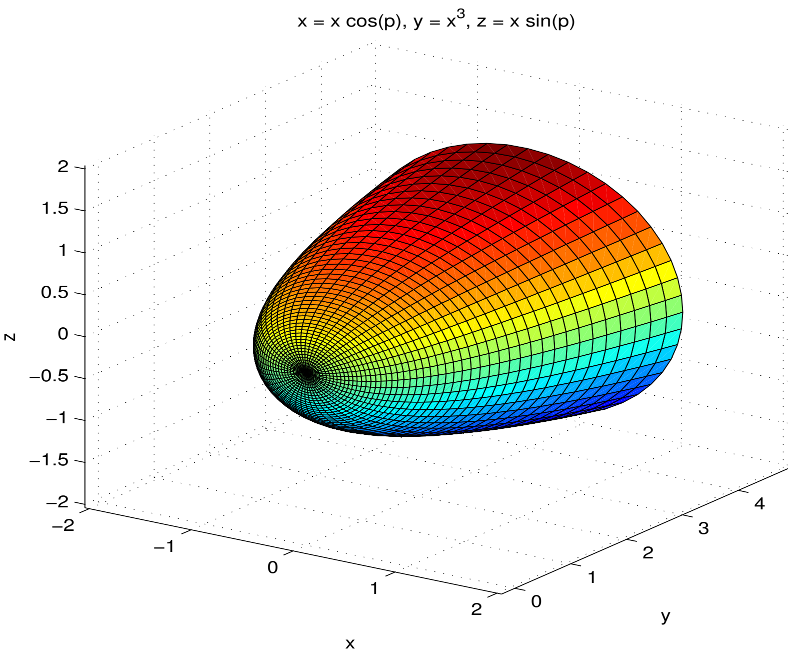

Bild 15 b): Rotationskörper bzgl. der y-Achse

Uneigentliche Integrale

Definition:

Sei $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ in jedem Teilintervall $[a,c] \subset [a,b[$ mit $c < b$ beschränkt und stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen.

a) **Singularität an einer Grenze, z.B. Polstelle in** b

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

b) **einseitig unbeschränkter Definitionsbereich, '$b = \infty$'**

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int\limits_a^{c} f(x)\,dx$$

Falls der entsprechende Grenzwert existiert, so heißt das uneigentliche Integral **konvergent**, sonst **divergent**.

Für die untere Integrationsgrenze, d.h. $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, werden entsprechende uneigentliche Integrale definiert.

Parameterabhängige Integrale

Die reelwertige Funktion $f(x,y)$ sei in $[a,b] \times [c,d]$ stetig bezüglich x und integrierbar bezüglich y, dann ist das folgende **parameterabhängige Integral** stetig

$$F(x) \;=\; \int_c^d f(x,y)\,dy\;, \quad a \le x \le b.$$

Beispiel:

Als **Laplace-Transformierte** zur Funktion $f(t)$ bezeichnet man das vom Parameter $s > 0$ abhängige Integral

$$F(s) \;=\; \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\;.$$

Satz: (Leibniz-Regel)

Ist die Funktion $f(x,y)$ zusätzlich stetig differenzierbar bezüglich x und sind $g(x)$ und $h(x)$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} F'(x) \;&=\; \frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right) \\ &=\; f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy\;. \end{aligned}$$

Aufgabe 16:

a) Man differenziere das parameterabhängige Integral

$$F(x) = \int_1^{2x} e^{3x+y}\, dy\,.$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{3x+2x} \cdot 2 - e^{3x+1} \cdot 0 + \int_1^{2x} 3e^{3x+y}\, dy \\ &= 2e^{5x} + 3e^{3x+2x} - 3e^{3x+1} = 5e^{5x} - 3e^{3x+1} \end{aligned}$$

b) Man berechne die uneigentlichen Integrale,
falls sie existieren

(i)
$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon}^9 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12((9-1)^{1/3} - \varepsilon^{1/3}) = 24 \end{aligned}$$

(ii)
$$\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} 8(x+1)^{1/4}\Big|_0^a$$
$$= \lim_{a\to\infty} 8((a+1)^{1/4}-1) = \infty$$

c) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$
die Laplace-Transformierte $F(s)$ für $s > 0$.

Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a - \int_0^a \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

$$= -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^a + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a - \int_0^a \gamma^2\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s} + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^a\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty}\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+\gamma^2}$$