Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

Lösung:

Für den Umfang des Kegelbodenkreises mit Radius r gilt:

$$2\pi r = \alpha R \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi} \, .$$

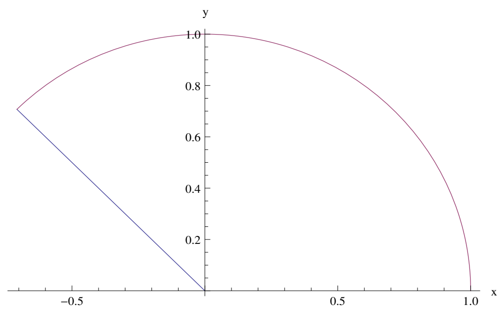

Bild 1 a) Kreissektor mit $R = 1$

Da die Länge der Kegelmantellinie mit R übereinstimmt, gilt nach dem Satz des Pythagoras $h^2 + r^2 = R^2$. Damit erhält man für die Kegelhöhe h:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2(\alpha)} = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{(2\pi)^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} \, .$$

Das Kegelvolumen ist also gegeben durch

$$V(\alpha) = \frac{\pi r^2(\alpha) h(\alpha)}{3} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \alpha^2 \sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \sqrt{(2\pi)^2 \alpha^4 - \alpha^6} \ \geq 0 \, .$$

Per Konstruktion gilt $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. In den Randpunkten des Definitionsbereichs $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_2 = 2\pi$ liegen offenbar Minima vor:

$$V(0) = 0 = V(2\pi) \, .$$

Die Extremalkandidaten im Inneren ergeben sich aus:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{4(2\pi)^2\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4 - \alpha^6}} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{\alpha(2(2\pi)^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}} \begin{cases} > 0 & , \quad 0 < \alpha < 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \\ = 0 & , \quad \alpha_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \\ < 0 & , \quad 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} < \alpha < 2\pi \, . \end{cases}$$

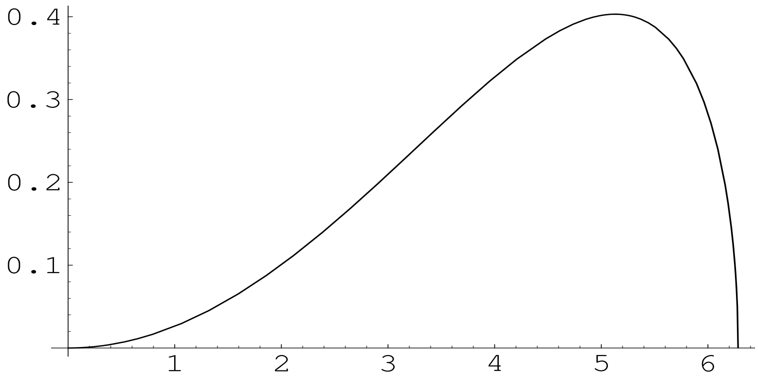

Bild 1 b) $V(\alpha)$ mit $R = 1$

Daher liefert $\alpha_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 5.130199321..$ das maximale Volumen mit

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{2(2\pi)^2}{3}\sqrt{(2\pi)^2 - \frac{2(2\pi)^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \approx 0.403066525R^3.$$

Kurven im $\mathbb{R}^2$

Definition:
Eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heißt **Kurve** bzw. **Parameterdarstellung einer Kurve** in der Ebene. t heißt der **Parameter** und $[a, b]$ das **Parameterintervall**.

$\mathbf{c}(a) = (x(a), y(a))^T$ heißt **Anfangspunkt** und

$\mathbf{c}(b) = (x(b), y(b))^T$ **Endpunkt** der Kurve.

Beispiele für Parameterdarstellungen

a) **Funktionsgraph** einer Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [a, b]$$

b) **Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$**

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{r}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor: $\boldsymbol{a}$, Richtungsvektor: $\boldsymbol{r}$

Soll die Gerade durch die beiden Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ verlaufen, so kann $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ gewählt werden.

c) **Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$** mit Radius $r = r(\varphi)$

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

d) **Kreis um** (x_0, y_0) **vom Radius** R(=konstant)

Einzelgleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Parameterdarstellung in Polarkoordinaten: $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ y_0 + R\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[$

e) **Ellipse um** (x_0, y_0) **mit den Halbachsen** a **und** b

Einzelgleichung: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Parameterdarstellung in angepassten Polarkoordinaten:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Aufgabe 2:

a) Für die folgenden Kurven gebe man Parameterdarstellungen an und zeichne sie:

(i) die Gerade, die durch die Punkte $(1,3)$ und $(-3,-4)$ verläuft,

(ii) die durch $9x^2+4y^2-36x-8y+4=0$ beschriebene Ellipse.

b) Man zeichne die Epizykloide mit $t \in [0,8\pi]$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t/4)-\cos(5t/4) \\ 5\sin(t/4)-\sin(5t/4) \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) (i) Die Orts-, Richtungsvektordarstellung für eine Gerade durch die Punkte $\boldsymbol{a}=(1,3)^T$ und $\boldsymbol{b}=(-3,-4)^T$ mit $t\in\mathbb{R}$ lautet

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{1 + t (-3 - 1), 3 + t (-4 - 3)}}, {t, -0.5, 3},
AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-3, 4}]
```

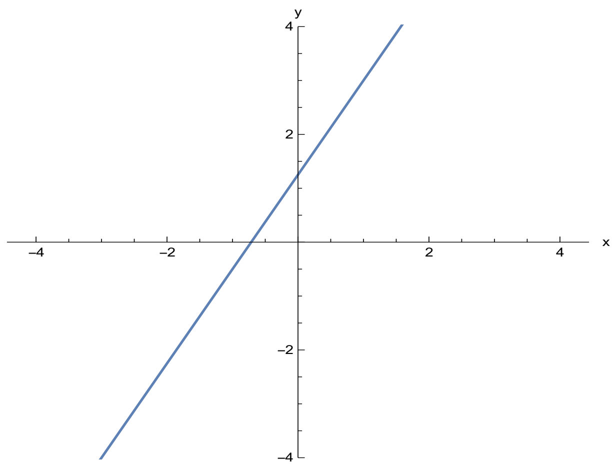

Bild 2 a) (i) Gerade durch $\boldsymbol{a}=(1,3)^T$ und $\boldsymbol{b}=(-3,-4)^T$

(ii) Mit quadratischer Ergänzung erhält man eine Ellipsengleichung mit den Halbachsen $a=2$ und $b=3$ und dem Mittelpunkt $(x_0,y_0)=(2,1)$.

$$\begin{aligned} 0 &= 9x^2+4y^2-36x-8y+4 \\ &= 9(x^2-4x+4-4)+4(y^2-2y+1) \\ &= 9(x-2)^2-36+4(y-1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2} \end{aligned}$$

Parameterdarstellung durch angepasste Polarkoordinaten

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 2\cos t \\ 1 + 3\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{2 + 2 Cos[t], 1 + 3 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-2, 4}]
```

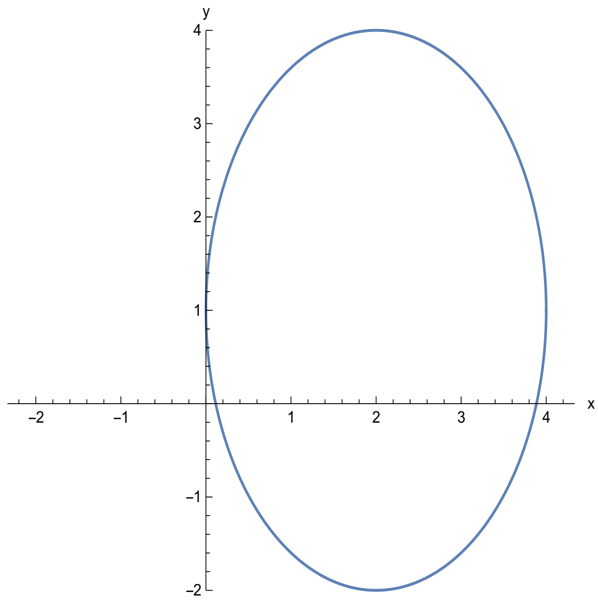

Bild 2 a) (ii) Ellipse, Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$, Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$

b) Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{5 Cos[t/4] - Cos[5 t/4],
   5 Sin[t/4] - Sin[5 t/4]}, {5 + Cos[t], Sin[t]}, {4 Cos[t],
   4 Sin[t]}}, {t, 0, 8 Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

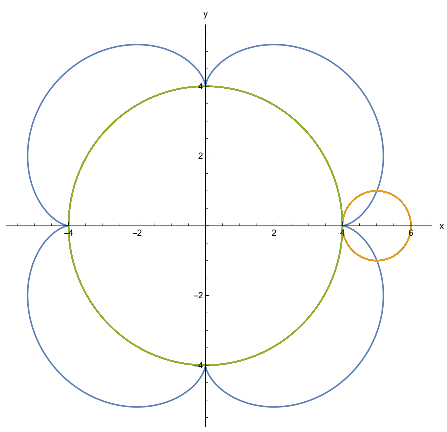

Bild 2 b) Epizykloide mit $r = 1$ und $R = 4$

Wird ein kleiner Kreis mit Radius r außen auf einem großen Kreis mit Radius R abgerollt, so beschreibt die Epizykloide die Bahnkurve des Berührungspunktes P der beiden Kreise zu Beginn des Abrollens. Für $r = 1$ und $R = 4$ kehrt P nach $R/r = 4$-maligem abrollen in seinen Ausgangspunkt zurück.

Tangenten- und Normalenvektoren einer Kurve

Ist jede der Koordinatenfunktionen von $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$ stetig differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\dot{\mathbf{c}}(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t_0+h) - \mathbf{c}(t_0)}{h} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor der Kurve $\mathbf{c}$ an der Parameterstelle t_0.

Gilt für alle $t \in [a, b]$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad ||\dot{\mathbf{c}}(t)|| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} > 0$$

so bezeichnet man $\mathbf{c}$ auch als **reguläre** oder **glatte Kurve**.

Die Parameterdarstellung der **Tangentengleichung** im Punkt $\mathbf{c}(t_0)$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, also die Geradengleichung in Orts- und Richtungsvektordarstellung, lautet

$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{c}(t_0) + \lambda\, \dot{\mathbf{c}}(t_0)\,.$$

Eliminiert man in der Komponentenschreibweise dieser Gleichung λ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

z.B. für $\dot{x}(t_0) \neq 0$ durch Auflösen der ersten Gleichung nach λ und Einsetzen in die zweite Gleichung, so ergibt sich die Tangente als Einzelgleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)) \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese stimmt mit der Gleichung der Tangente (Taylor-Polynom ersten Grades)

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

einer reellwertigen Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 überein, wenn man die Umparametrisierung $x = x(t)$ mit der Kettenregel für $y(t) = f(x(t))$ im Punkt t_0 und den Bezeichnungen $x_0 = x(t_0)$ und $f(x_0) = f(x(t_0)) = y(t_0)$ durchführt.

Der **Anstieg** der Kurve $\mathbf{c}(t)$ lässt sich über den Winkel $\alpha(t)$ zwischen der x-Achse und dem Tangentenvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ beschreiben. Im Punkt t_0 ergibt sich

$$\tan(\alpha(t_0)) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\,.$$

Einen **Normalenvektor** $\boldsymbol{n}$, also einen zum Tangentenvektor $\dot{\mathbf{c}}$ senkrechten Vektor, erhält man zum Parameterwert t_0 im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t_0)$ durch

$$\boldsymbol{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}\,.$$

Die Einzelgleichung der **Normalen** lautet dann

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)) \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für eine Kurve $\mathbf{c}(t)$ mit $a \leq t \leq b$ gibt die **Bogenlänge** $s(t)$ die Länge des Kurvenbogens zwischen $\mathbf{c}(t)$ und $\mathbf{c}(a)$ an. Damit kann die Länge des Kurvenbogens zwischen den Kurvenpunkten $\mathbf{c}(t+h)$ und $\mathbf{c}(t)$ beschrieben werden durch $\Delta s = s(t+h) - s(t)$ und man erhält

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = ||\dot{\mathbf{c}}(t)|| \, .$$

Dabei wird

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = ||\dot{\mathbf{c}}(t)||dt$$

als **Differential der Bogenlänge** oder **Bogenelement** bezeichnet. Mit $dt = \Delta t = (t+h) - t = h$ kann ds für kleines h als Näherung für Δs verwendet werden:

$$s(t+h) - s(t) = \Delta s \approx ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt \quad \Leftrightarrow \quad s(t+h) \approx s(t) + ||\dot{\mathbf{c}}(t)||dt \, .$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, \infty[$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

a) Man zeichne die Zykloide $\mathbf{c}$ für $t \in [0, 3\pi]$.

b) Man berechne den Tangentenvektor zum Parameterwert t im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t)$. In welchen Kurvenpunkten ist $\mathbf{c}$ nicht regulär?

c) Man bestimme in allen regulären Kurvenpunkten, in denen der Anstieg gleich null ist, die Tangentengleichung in Parameterform und als Einzelgleichung.

d) Man berechne näherungsweise die Länge des Kurvenbogens zwischen $\mathbf{c}(\pi)$ und $\mathbf{c}(2\pi)$ unter Verwendung des Differentials der Bogenlänge zum Parameterwert $t = \pi$.

Lösung:

a) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 3\pi]$, Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{{t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {Cos[t],
   Sin[t] + 1}, {0.07 Cos[t], 0.07 Sin[t]}}, {t, 0, 3 Pi},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 0.2]
```

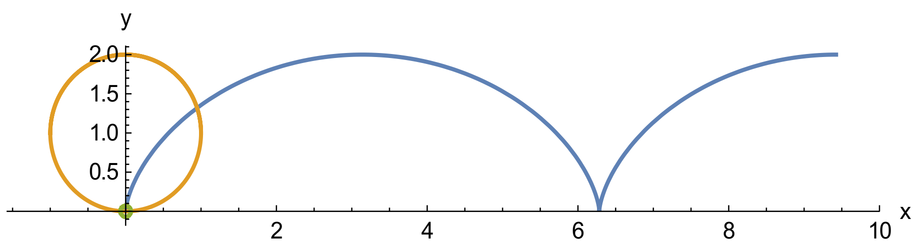

Bild 3 a) Zykloide, mit Abrollkreis vom Radius $R = 1$

Wird ein Kreis mit Radius R, auf dem sich der Punkt P befindet (für $t = 0$ sei $P = \mathbf{0}$), auf der x-Achse abgerollt, so beschreibt die Zykloide die Bahnkurve von P.

b) Tangentenvektor: $\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Für reguläre Punkte gilt $||\dot{\mathbf{c}}(t)|| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} > 0$.

$$1 - \cos t = 0 \;\Rightarrow\; t_n = 2n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; \sin t_n = 0 \;\Rightarrow\; ||\dot{\mathbf{c}}(t_n)|| = 0$$

Nur für $t_n = 2n\pi$ erhält man also die singulären Punkte $\mathbf{c}(t_n) = (2n\pi, 0)^T$.

c) Wird mit α der Winkel zwischen x-Achse und Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$ im Punkt $\mathbf{c}(t)$ beschrieben, so ergibt sich der Anstieg durch

$$\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Einen Anstieg von null, d.h. eine waagerechte Tangente, erhält man daher durch

$$\dot{y}(t) = \sin t = 0 \quad \wedge \quad \dot{x}(t) \neq 0.$$

Da die singulären Kurvenpunkte zu den Parameterwerten $t_n = 2n\pi$ ausgenommen sind, ergibt sich eine waagerechte Tangente nur für die Parameterwerte $t_n = (2n+1)\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ in den Kurvenpunkten

$$\mathbf{c}((2n+1)\pi) = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi - \sin((2n+1)\pi) \\ 1 - \cos((2n+1)\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tangentengleichung in Parameterform mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{T}(\lambda) = \mathbf{c}(t_0) + \lambda\,\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \begin{pmatrix} (2n+1)\pi \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{(2n+1)\pi + 2\lambda}^{=:x} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tangentengleichung als Einzelgleichung mit $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)) = 2 + \frac{0}{2}(x - (2n+1)\pi) = 2$$

d) Für die Bogenlängendifferenz Δs gilt mit $t = \pi$ und $dt = 2\pi - \pi = \pi$

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \left(\sqrt{2^2 + 0^2}\right)\pi = 2\pi$$

Mit Hilfe der Integration lässt sich (später) Δs exakt berechnen

$$\begin{aligned}
\Delta s &= \int_\pi^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \int_\pi^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt \\
&= \int_\pi^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = \sqrt{2}\int_\pi^{2\pi} \sqrt{2\sin^2(t/2)}dt = 2\int_\pi^{2\pi} |\sin(t/2)|dt \quad \left(\leq 2\int_\pi^{2\pi} dt = 2\pi\right) \\
&= -4\cos(t/2)\big|_\pi^{2\pi} = 4\,.
\end{aligned}$$

Krümmung einer Kurve

Die **Krümmung** κ einer Kurve $\mathbf{c}$ ist ein Maß für die Änderung des Winkels α zwischen Kurventangente und x-Achse im Verhältnis zur Änderung der Bogenlänge s und wird definiert durch

$$\kappa(s) := \frac{d\alpha}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Liegt $\mathbf{c}$ in der Parameterform $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$ vor, so ergibt eine Umrechnung die Darstellung von κ in Abhängigkeit vom Parameter t

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}\,.$$

Beispiele

a) **Funktionsgraph** $\quad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$

b) **Geraden** besitzen die Krümmung Null.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \kappa(t) = 0$$

c) **Kreise** besitzen konstante Krümmung.

Kreis vom Radius R um (x_0, y_0) mit $0 \le \varphi < 2\pi$ mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos(\varphi) \\ y_0 + R\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(\varphi) = \frac{\dot{x}(\varphi)\ddot{y}(\varphi) - \ddot{x}(\varphi)\dot{y}(\varphi)}{(\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2)^{3/2}} = \frac{R^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))}{(R^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)))^{3/2}} = \frac{1}{R}$$

Krümmungskreis

Die Kurve $\mathbf{c}$ besitze die Parametrisierung $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$ mit $a \le t \le b$. Für den Kurvenpunkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ wird der **Krümmungskreis** folgendermaßen festgelegt:

a) P_0 liegt auf dem Krümmungskreis

b) Der Kreis besitzt den **Krümmungsradius** $R(t_0) := \dfrac{1}{|\kappa(t_0)|}$

c) Der Mittelpunkt $M_0 = (x_m(t_0), y_m(t_0))^T$ liegt auf dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}(t_0)$, wird als **Krümmungsmittelpunkt** bezeichnet und berechnet sich durch

$$\begin{pmatrix} x_m(t_0) \\ y_m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix},$$

denn die Normalenrichtung musste zunächst auf Länge eins normiert werden, d.h. es wurde die Richtung $\boldsymbol{n}(t_0)/\sqrt{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2}$ für die Berechnung verwendet.

Aufgabe 4:

Mit $t, y \in \mathbb{R}$ wird durch $y - t^2 = 0$ eine Parabel beschrieben.

a) Man bestimme eine Parametrisierung $\mathbf{c}(t)$ der Parabel über den Funktionsgraphen.

b) Man berechne den Kurvenpunkt mit maximaler Krümmung,

c) den Krümmungskreis und

d) zeichne die Kurve mit dem berechneten Krümmungskreis.

Lösung:

a) Durch Auflösen nach y erhält man $\quad y - t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = t^2.$

Parametrisierung von $\mathbf{c}$ über den Funktionsgraphen mit $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

b) Die Krümmung berechnet man durch

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} = \frac{1 \cdot 2 - 0 \cdot 2t}{(1 + (2t)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\kappa}(t) = -\frac{24t}{(1 + 4t^2)^{5/2}} \begin{cases} > 0 & t < 0 \quad \text{streng monoton wachsend} \\ = 0 & t = 0 \quad \text{strenges globales Maximum} \\ < 0 & 0 < t \quad \text{streng monoton fallend} \end{cases}$$

Damit liegt das strenge globale Maximum mit Krümmungswert $\kappa(0) = 2$ im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(0) = (0, 0)^T$.

c) Für den Krümmungskreis erhält man

Krümmungsradius: $\quad R = \dfrac{1}{\kappa(0)} = \dfrac{1}{2}$

Krümmungsmittelpunkt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_m(0) \\ y_m(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2}{\dot{x}(0)\ddot{y}(0) - \ddot{x}(0)\dot{y}(0)} \begin{pmatrix} -\dot{y}(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{{t, t^2}, {Cos[t]/2, Sin[t]/2 + 1/2}}, {t, -Pi, Pi},
               AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-1.5, 1.5}]
```

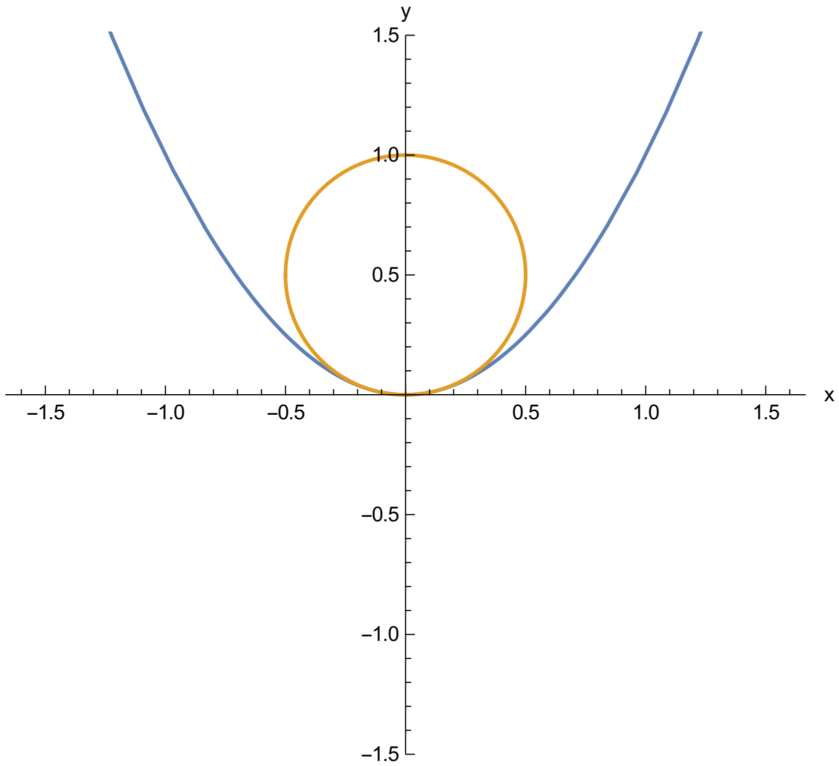

Bild 4 $y(t) = t^2$ mit Krümmungskreis in $(0,0)$