

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2020

Inhalte der Vorlesung Analysis II.

- 1 Gleichmäßige Konvergenz.
- 2 Potenzreihen.
- 3 Elementare Funktionen.
- 4 Interpolation.
- 5 Integration.
- 6 Kurven und Kurvenintegrale.
- 7 Numerische Quadratur.
- 8 Extrapolation.
- 9 Periodische Funktionen, Fourier-Reihen.
- 10 Schnelle Fourier-Transformation (FFT).

6.1. Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- **punktweise** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

6.1. Gleichmäßige Konvergenz

Beispiel: Betrachte die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert **punktweise** gegen die **unstetige** Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ **nicht** gleichmäßig gegen f , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wichtiges Resultat zur gleichmäßigen Konvergenz.

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D .

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, sodass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } \|z - z_0\| < \delta. \end{aligned}$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und es gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D .

Folgerung: Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

auf D gleichmäßig konvergiert. Dann ist f stetig in D .

Beweis und Vertauschbarkeit Differentiation/Summation.

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^m f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \quad \text{für } x \in (a, b),$$

auf (a, b) gleichmäßig konvergent sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

6.2. Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt (komplexe) **Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln(z), \cos(z), \sin(z), \dots$$

Beispiel: Taylor-Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen.

- Die Taylor-Reihe einer \mathcal{C}^∞ -Funktion ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch**.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: Wir definieren

$$r := \sup \left\{ |w| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe **divergent**.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) **konvergent**.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq M \quad \text{für alle } k \geq 0$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: (Fortsetzung) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

und weiterhin

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1 \quad \text{für alle } k \geq 1,$$

sodass die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$.

Die Formel von Cauchy–Hadamard.

Satz: Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy–Hadamard berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (\text{siehe 3.3 aus Analysis I})$$

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium

$$\forall k \geq k_0 \quad : \quad \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Beweis des letzten Satzes.

Beweis: Der erste Teil von a) folgt aus der Formel von Cauchy–Hadamard. Verwende für den zweiten Teil von a) das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Zu Teil b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy–Hadamard, womit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch.

Beispiele.

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $k!z^k$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2} (2 + 6z + 12z^2 + \dots)$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die **integrierte Potenzreihe**

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

liefert eine **Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion**

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Potenzreihenentwicklung von \arctan .

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert die Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind \mathcal{C}^∞ -Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer **Taylor-Reihe** überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{für } |x - x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- **Identitätssatz für Potenzreihen:** Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

- **Abelscher Grenzwertsatz:** Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Beispiel zum Abelschen Grenzwertsatz.

Beispiel: Die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

b)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k \quad \text{für } |z| < r_1$$

c) **Cauchy-Produkt für Potenzreihen**

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen etc.

- d) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen, d.h. es gibt ein $r_3 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{für } |z| < r_3$$

- e) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein $r_4 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $d_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \quad \text{für } |z| < r_4,$$

die sich nach dem Cauchy-Produkt in c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \quad a_0 d_k = - \sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den **cosinus hyperbolicus** für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält man für $x \in \mathbb{R}$ den **sinus hyperbolicus** durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l \right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \right) \cdot \left(1 + x + x^2 + \dots \right) \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!} \right) x^3 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \right) x^4 + \dots \quad \text{für } -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{l=0}^k \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ 0 & : k > 0 \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \quad B_k = - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

6.3. Elementare Funktionen

Die **Exponentialfunktion** ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{l=0}^k \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichung.

Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Folgerung:

Für die Exponentialfunktion gilt:

- 1) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- 2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- 3) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 4) Asymptotisches Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:

5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

7) Für die **Eulersche Zahl** $e := \exp(1)$ gilt: Es gilt:

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$e = 2.718281828459045235360287 \dots$$

Die Eulersche Zahl ist e eine **irrationale Zahl**.

8) Es gilt $\exp(qx) = (\exp(x))^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den **natürlichen Logarithmus**.

Eigenschaften:

- 1) $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.
- 2) Es gilt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.
- 3) Es gilt die **Funktionalgleichung**

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \quad \text{für alle } x > 0, q \in \mathbb{Q}.$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

7) Es gilt die **Potenzreihenentwicklung**

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher **allgemeine Potenzen** wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \quad \text{für } a > 0, z \in \mathbb{C}$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

- 1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.
- 2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den **Logarithmus zur Basis a** , wobei gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für } x > 0$$

4) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x, a > 0.$$

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: Es gilt

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \text{für } a \in \mathbb{R}, -1 < x < 1$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \quad \text{für } k \geq 0$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$.

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

die aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgen.

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

1) Die Funktion \cosh ist **gerade** und \sinh **ungerade**, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

3) Es gelten die **Funktionalgleichungen**

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

4) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion \sinh ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R} , die Funktion \cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit arcosh und arsinh .

Es gilt

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für } 1 \leq x < \infty$$

sowie

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{für } 1 \leq x < \infty$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Die Funktionen \sin und \cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz \mathbb{C} erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) \sin ist eine **ungerade**, \cos eine **gerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

3) Es gilt:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = (\cos x \cosh y) - i(\sin x \sinh y)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

4) Es gelten die **Funktionalgleichungen**

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

5) Für die **reellen** Ableitungen bekommt man

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

Tangens- und Kotangensfunktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad (z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \quad (z \neq k\pi)$$

Eigenschaften:

- 1) \tan und \cot sind π -periodische, ungerade Funktionen.
- 2) Es gilt

$$\tan z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Reihen-Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen-Entwicklungen

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}| z^{2k-1} \quad \text{für } 0 < |z| < \pi$$

mit den **Bernoullischen Zahlen** B_{2k} .

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitionsbereich gilt

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Kapitel 7. Interpolation

7.1. Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an $n + 1$ **Stützstellen**

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Gesucht: **Einfache** Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Daten **interpoliert**, d.h.

$$p(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots, n.$$

Zum Beispiel: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen:

- 1 Gibt es so ein p ? Falls ja, ist p eindeutig?
- 2 Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p ?

Klassische Polynom-Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n -ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, d.h. $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f_n$$

Vandermonde–Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

kurz

$$V \cdot a = f$$

heißt **Vandermonde–Matrix**.

Satz:

Für die Determinante der Vandermonde–Matrix $V = V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls die Stützstellen x_0, \dots, x_n paarweise verschieden sind, so ist die Vandermonde-Matrix V regulär.

Satz: Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

Aber: Wir berechnen die Lösung auf Grund der Komplexität **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f$.

7.2. Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Langrange–Darstellung.

Definieren **Lagrange–Polynome**

$$\begin{aligned}L_j(x) &:= \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n , und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq i, j \leq n.$$

Lösung mit der Lagrange-Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom $p_n(x)$

$$p_n(x) := f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

Die obige Darstellung von p_n heißt **Lagrange-Darstellung**.

Beispiel: Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Beispiel zur Lagrange-Darstellung.

Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange-Basis wie folgt aus.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \quad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \quad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\ &= -4 \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Interpolation in der Newton-Darstellung.

Betrachte die **Newton-Basis**

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Dann gibt es *eindeutige* **Newton-Koeffizienten** $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i \omega_i(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die obige Darstellung von p_n heißt **Newton-Darstellung**.

Beachte: Es gilt

$$p_n(x_0) = c_0$$

$$p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$p_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Berechnung der Newton-Koeffizienten.

Beachte: Aus den Interpolationsbedingungen folgt

$$p_n(x_0) = c_0 \stackrel{!}{=} f_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f_0$$

$$p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} f_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$p_n(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + \dots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$
$$\stackrel{!}{=} f_n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{\omega_n(x_n)} \left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \omega_i(x_n) \right)$$

Folgerungen aus der Newton–Darstellung.

- Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j + 1)$ Daten

$$(x_0, f_0), \dots, (x_j, f_j)$$

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j] \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

- Nimmt man ein Datum (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$

mit

$$c_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\omega_{n+1}(x_{n+1})}$$

Die Methode der dividierten Differenzen.

Satz: Die Koeffizienten

$$c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j] \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

des interpolierenden Newton-Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \omega_i(x)$$

sind gegeben durch die **dividierten Differenzen**

$$f[x_j] = f_j$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Effiziente Berechnung der dividierten Differenzen.

Rekursives Berechnungsschema der dividierten Differenzen für $n = 3$.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Zum Beispiel:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Der Interpolationsfehler.

Für das Interpolationspolynom gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - [p_{n+1}(x) - c_{n+1}\omega_{n+1}(x)] \\ &= f[x_0, \dots, x_n, x]\omega_{n+1}(x)\end{aligned}$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Folgerung: Für den **Interpolationsfehler** gilt die Abschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |\omega_{n+1}(x)|$$

Tschebyscheff-Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das **Knotenpolynom**

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten x_0, x_1, \dots, x_n , so dass

$$\max_{x_0, \dots, x_n \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$ ist.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die **Tschebyscheff-Knoten** optimal

$$x_j = \cos \left(\frac{2j+1}{2n+2} \pi \right) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

7.3. Spline-Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Definition: Eine Funktion $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **kubischer Spline**, falls

- $S \in \mathcal{C}^2([a, b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$,
- S ist auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$ ein **kubisches** Polynom:

$$S(x) \Big|_{[x_{j-1}, x_j]} = s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

Ziel: Interpolation der Daten (x_j, f_j) , $0 \leq j \leq n$ mit kubischen Spline S , so dass

$$S(x_j) = f_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Interpolation mit kubischen Splines.

Beobachtung:

Ein kubischer Spline besitzt $4n$ Parameter, die wie folgt bestimmt werden.

- Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{und} \quad s_j(x_j) = f_j \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

- Stetigkeit der Ableitung:

$$s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1,$$

- Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1.$$

Dies sind insgesamt $(4n - 2)$ Gleichungen für $4n$ Parameter.

Resultat: Es fehlen noch zwei Bedingungen!

Zwei weitere Nebenbedingungen.

Definition: Ein kubischer Spline heißt

- **natürlicher Spline**, falls $S''(a) = S''(b) = 0$,
- **periodischer Spline**, falls $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$,
- **allgemeiner Spline**, falls $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

Beachte: Jede drei obigen Bedingungen liefert zwei weitere Gleichungen.

Satz: Unter allen interpolierenden C^2 -Funktionen minimiert der **natürliche kubische Spline** das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

Bemerkung: Das Funktional I mißt die Krümmung von y *approximativ*.

Berechnung des natürlichen kubischen Splines.

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

so gilt

$$a_j = f_{j-1}$$

$$b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j$$

$$c_j = \frac{M_{j-1}}{2}$$

$$d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n$.

Die Momente $M_j = S''(x_j)$ lösen ein lineares System mit *Tridiagonalmatrix*.

Herleitung des Splines mit Momentenmethode.

Der gewählte Ansatz

$$M_j := S''(x_j), \quad \text{für } 0 \leq j \leq n,$$

heißt **Momentenmethode**: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \quad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Zweifache Integration über Intervall $[x_{j-1}, x]$ liefert

$$s_j'(x) = B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2$$

$$s_j(x) = A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-1})^3$$

mit den Integrationskonstanten A_j, B_j .

Lösung der Bedingungsgleichungen.

Aus den Interpolationsbedingungen $s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ und $s_j(x_j) = f_j$ folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad \text{und} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}) \quad (1)$$

mit der Stetigkeit von S' bei x_j , $1 \leq j < n$, d.h. $s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j)$ weiterhin

$$B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2}h_j = B_{j+1} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \quad (2)$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt schließlich $n-1$ lineare Gleichungen

$$h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})M_j + h_{j+1}M_{j+1} = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

$1 \leq j \leq n-1$, für die $n-1$ *unbekannten* Momente M_1, \dots, M_{n-1} .

Beachte: Die Momente $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ sind bereits *bekannt*.

Tridiagonalsystem für die Momente.

Das hergeleitete $(n - 1) \times (n - 1)$ lineare System hat die Form

$$\begin{pmatrix} 2k_1 & h_2 & & & \\ h_2 & 2k_2 & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2k_{n-2} & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, $k_j = h_j + h_{j+1}$, $1 \leq j \leq n - 1$, und

$$d_j = 6 \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n - 1,$$

sowie den Randwerten $M_0 = M_n = 0$.

Abschließende Bemerkungen zu Splines.

- Der natürliche kubische Spline kann **effizient** berechnet werden, nämlich durch Lösen des Tridiagonalsystems in nur $O(n)$ Schritten.
- Ein interpolierender Spline vermeidet (unerwünschte) Oszillationen.
- Für $f \in \mathcal{C}^4$ gilt die asymptotische Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S(x)| = O(h^4), \quad h \rightarrow 0$$

wobei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$.

- Verwendet man einen **vollständigen** Spline mit Randbedingungen

$$S'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad S'(b) = f'(b)$$

so erhält man ein Tridiagonalsystem, das effizient gelöst werden kann.

- Verwendet man **periodische** Splines, so erhält man kein Tridiagonalsystem. Die Lösung kann dennoch effizient in $O(n)$ Schritten berechnet werden.

8.1. Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung** (*Partition, Unterteilung*) des Intervalls $[a, b]$.

Die **Feinheit** der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit \mathbf{Z} bzw. $\mathbf{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

Riemannsche Summen.

Definition: Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{für } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung Z ,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z ,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Obersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung Z .

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für *fixe* Zerlegungen gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2 , d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Das Riemannsches Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad (\text{Unterintegral})$$

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} \quad (\text{Oberintegral})$$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt (Riemann-)integrierbar über $[a, b]$, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) dx$$

das (Riemann-)Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.

Beispiele zum Riemann-Integral.

Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b - a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$$

Für $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ gilt

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

und somit

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Weitere Beispiele zum Riemann-Integral.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0$, $O_f(Z) = 1$.

Somit ist die Funktion **nicht** integrierbar.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq c \\ 1 & : x = c \end{cases}$$

für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

denn es gilt

$$U_f(Z) = 0 \quad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|$$

Eigenschaften des Riemann-Integrals.

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar über $[a, b]$. Dann gilt:

- a) Für $a \leq c \leq b$ ist f über $[a, b]$ integrierbar, genau dann wenn f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- b) **Linearität:** Mit f und g ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrierbar:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- c) **Positivität:** Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

- d) **Monotonie:** Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Standardabschätzungen zum Riemann-Integral.

Satz: Sei f integrierbar über $[a, b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b - a) \cdot \inf(f[a, b]) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \cdot \sup(f[a, b])$$

und weiterhin

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

Falls $|f(x)|$ integrierbar ist, so gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis des letzten Satzes.

Für die Zerlegung $Z = \{a, b\}$ von $[a, b]$ folgt sofort

$$\begin{aligned} \inf(f[a, b]) \cdot (b - a) = U_f(Z) &\leq \int_a^b f(x) dx \\ &\leq O_f(Z) = \sup(f[a, b]) \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x) \leq |f(x)|$, für alle $x \in [a, b]$, die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \\ &\leq O_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx$$

liefert insbesondere die Positivität des Integrals.

Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c .

Wir definieren daher

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

sowie

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt

$$R_f(Z_m) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a, b]$ mit $\|Z_m\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Kapitel 8. Integration

8.2. Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent

- a) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.
- b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$0 \leq O_f(Z) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - U_f(Z) < \varepsilon/2,$$

- a) \rightarrow b): Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.
- b) \rightarrow a): Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus b) mit

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Beschränkte monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine beschränkte monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b - a), \quad 0 \leq j \leq n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n . Nach dem Riemanschen Kriterium ist f integrierbar. Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend.

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar über $[a, b]$.

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannschem Kriterium integrierbar.

8.3. Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: Seien $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dann heißt $F(x)$ **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion

$$F_1(x) - F_2(x)$$

konstant.

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Beweisideen:

a) Zeige, dass gilt:

$$\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

b) Folgt direkt aus a) mittels

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Beweis von a).

Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x + h \in [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq h \text{ und } t \in [a, b]\} \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a, b]$.

Beweis von b).

Mit Teil a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

für eine Konstante C . Daraus folgt

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C$$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Bemerkungen.

- Teil a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad F'(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch **das unbestimmte Integral** von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x) dx$$

Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beispiele zur Integration.

Wir bezeichnen mit C stets die **Integrationskonstante**.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

Weitere Beispiele zur Integration.

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{für } a \neq 0$$

$$\int b^x dx = \frac{1}{\ln b} b^x + C \quad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C \quad \text{für } x > 0$$

$$\int \log_b x dx = \frac{x}{\ln b} (\ln x - 1) + C \quad \text{für } b > 0, x > 0$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz (Partielle Integration): Sind $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation.

Die Substitutionsregel.

Satz: Ist $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar und $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t) dt = F(h(t))$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_a^b f(h(t))h'(t) dt &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx \\ &= F(h(b)) - F(h(a))\end{aligned}$$

Beweis: folgt direkt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t)$$

Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3) dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx \\ &= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x + C$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a \cos t$ in

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt$$

denn

$$dx = -a \sin(t) dt, \quad h(0) = a, \quad h(\pi) = -a$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt \\ &= a \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= a(t - \sin t \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2} \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2t dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t 2t dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral läßt sich explizit “lösen”, d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt “einfache” Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{Integralsinus})$$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{Fehlerfunktion})$$

$$E(x, k) := \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{\pm \frac{1}{2}} dt \quad (\text{Elliptische Integrale})$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x)$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x)p(x) dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) dx$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt [Mittelwertsatz der Differentialrechnung](#) für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

Der Satz von Taylor.

Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ um x_0 durch n -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = \int_{x_0}^x (x-t)^0 f'(t) dt \\ &= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)^1 f''(t) dt \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus dem Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

8.4. Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration **rationaler Funktionen** $R(x)$ mit

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Methode: **Partialbruch-Zerlegung** von rationalen Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x - a_j)^2 + b_j^2]^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x - a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg p \geq \deg q$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit **Polynomdivision**, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \iff p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x)$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
 - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j ;
 - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz der Partialbruchzerlegung.

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right]$$

Unbekannte **Parameter**, die bestimmt werden müssen:

$$\alpha_{jl}, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad l = 1, \dots, k_j$$

$$\gamma_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \quad l = 1, \dots, k_j$$

$$\delta_{jl}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \quad l = 1, \dots, k_j$$

Diese Parameter werden durch **Koeffizientenvergleich** berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel.

Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1-x = x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1)$$

- Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

- **Typ I: Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^s c_k x^k dx = \sum_{k=0}^s \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

- **Typ II: Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & \text{für } l = 2, 3, \dots \end{cases}$$

- **Typ III: Inverse Quadrate:**

$$I_l := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^l} dx \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

- Für $l = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C$$

- Für $l > 1$ kann man I_l wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{l-1}} \right] \quad \text{für } l = 2, 3, \dots$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^l} dx &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{u^{l-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{l-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{l-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{l-1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^l} dx = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^l} dx + I_l \\ &= \frac{x}{2(1-l)(x^2 + 1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)} \cdot I_{l-1} + I_l\end{aligned}$$

Somit:

$$I_l = \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l)I_{l-1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^{l-1}} \right] \quad \text{für } l = 2, 3, \dots$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx + d}{[(x - a)^2 + b^2]^l} dx = \frac{c}{2} \int \frac{2(x - a)}{[(x - a)^2 + b^2]^l} dx + (d + c \cdot a) \int \frac{dx}{[(x - a)^2 + b^2]^l}$$

- Erstes Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x - a)}{[(x - a)^2 + b^2]^l} dx &= \int \frac{du}{u^l} \\ &= \begin{cases} \ln |(x - a)^2 + b^2| + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{1}{1 - l} \cdot \frac{1}{[(x - a)^2 + b^2]^l} + C & \text{für } l = 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x - a)^2 + b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^l} \quad \text{mit } t = \frac{x - a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned}R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned}\int R(x) dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + C\end{aligned}$$

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt$$

8.5. Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne **uneigentliche Integrale**, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{wobei } f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig oder } f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls sie über jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset D$ integrierbar ist.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $[a, \infty)$ bzw. $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(x) dx$$

und im Allgemeinen **nicht identisch** mit obigem Integral!

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b) , so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx = -\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y xe^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{y^2} e^{-u} du \quad \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-y^2}) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx = 1$$

Konvergenzkriterien.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists C > a : \forall z_1, z_2 > C : \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

b) Ist das uneigentliche Integral **absolut konvergent**, d.h.

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Majorantenkriterium.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

c)

$$\forall x : |f(x)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x) dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \quad \text{absolut konvergent}$$

d) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x : 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x) dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \quad \text{divergent}$$

Beispiel: Das Dirichlet-Integral.

Betrachte das **Dirichlet-Integral**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

und somit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{y_1} \rightarrow 0 \quad \text{für } y_1 \rightarrow \infty.$$

Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$, ist aber **nicht** absolut konvergent.

Beispiel: Das Exponentialintegral.

Betrachte das **Exponentialintegral**

$$\text{Ei}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$$

folgt die **absolute Konvergenz** des Exponentialintegrals $\text{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium.

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die **Gamma-Funktion** $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq t^{x-1} \quad \text{für } 0 < t \leq 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x} (1 - \varepsilon^x) \rightarrow \frac{1}{x} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral.

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$|e^{-t}t^{x-1}| = \left| \frac{e^{-t}t^{x+1}}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2} \quad \text{für } 1 \leq t \leq \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Bemerkung: Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Kapitel 8. Integration

8.6. Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} f(x, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.

Sei $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a, b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$$

Fragen:

- 1) Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x, y)$ stetig ist?
- 2) Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x, y)$ nach x differenzierbar ist?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I .

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x, y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a, b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \quad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a, b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y)) dy \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)| dy < \varepsilon(b-a)$$

Somit ist F stetig in x_0 . Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig.

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$ und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall I stetig differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) dy \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) dy$$

Somit ist F in x_0 differenzierbar.

Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar.

Zwei Beispiele.

Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^{\pi} \frac{\sin(tx)}{t} dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^{\pi} \cos(tx) dt$$

Beispiel 2: Die Bessel-Funktion

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin(x \sin t - nt) dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \cos(x \sin t - nt) dt$$

Die Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der **Besselschen Differentialgleichung**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Definition: Das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{für } x \in I$$

heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt mit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das **Majorantenkriterium**, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x, y)$ gibt mit

$$|f(x, y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^{\infty} g(y) dy < \infty \quad \text{für alle } x, y \in I.$$

Beweis:

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, y) dy \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x, y)| dy \leq \int_a^{\infty} g(y) dy < \infty$$

Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: Sei $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y) dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I gleichmäßig konvergent. Dann ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen.

Beispiel: Die Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \ln t dt$$

9.1. Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x -Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi(f(x))^2 \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden **Rotationskörper** die Volumenformel

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein.

Beispiel.

Durch die Rotation der **Ellipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b > 0$$

um die x -Achse erhält man ein **Rotationsellipsoid** mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^a \left[b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right) dx = \frac{4}{3} \pi a b^2 \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

9.2. Kurven und Bogenlänge

Definition: Sei $c = (c_1, \dots, c_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

- Dann wird c als **Kurve** im \mathbb{R}^n bezeichnet; $c(a)$ heißt **Anfangspunkt**, $c(b)$ heißt **Endpunkt** von c . c heißt **geschlossene Kurve**, falls $c(a) = c(b)$.
- Falls $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion ist, d.h. jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ ist stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine **\mathcal{C}^1 -Kurve**.
- $c(t)$ heißt **stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve**, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

gibt, so dass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion ist.

- Die Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Beispiele.

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im \mathbb{R}^2 .

- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T$$

beschreibt eine **Zykloide**.

Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \quad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie (Helix)** mit Radius r und **Ganghöhe** h .

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \quad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinne wie die Kurve c .

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine **Umparametrisierung** (**Parameterwechsel**). Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer \mathcal{C}^1 -Kurve werden nur \mathcal{C}^1 -Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ läßt sich als eine Kurve auffassen:

$$c(x) := (x, f(x))^T \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

$$\text{bzw. } c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine untere Schranke für die **Bogenlänge** der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und in diesem Fall ist

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} L(Z)$$

die **Länge** der Kurve c .

Berechnung der Bogenlänge einer C^1 -Kurve.

Satz: Jede C^1 -Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Beweisskizze: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c'_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (c'_k(\tau_{k_j}))^2 (t_{j+1} - t_j)} \right)$$

Beispiel.

Berechne die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

$$\|\dot{c}(t)\| = r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2}$$

$$L(c) = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8r$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1 -Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = L(c)$$

Die Bogenlängenfunktion einer \mathcal{C}^1 -Kurve.

Definition: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve.

- Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c .

- Ist c glatt, so ist $S : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ ein \mathcal{C}^1 -Parameterwechsel.
- Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein \mathcal{C}^1 -Parameterwechsel.
- Die entsprechende Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**.

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ein **Einheitsvektor**, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der **Einheitstangentenvektor** von c .

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

d.h. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$.

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: Sei $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ die Bogenlängenparametrisierung der Kurve c .

- Dann bezeichnet man den Vektor

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** von c .

- Die Funktion

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\|, \quad 0 \leq s \leq L(c)$$

nennt man die **Krümmung** der Kurve c .

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\tilde{c}(s) = (\cos s, \sin s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$n(s) = \tilde{c}''(s) = -(\cos s, \sin s)$$

$$\kappa(s) = 1$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte den Graph von $y = y(x)$ als Kurve im \mathbb{R}^2 , d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \quad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(\sqrt{1 + (y'(x))^2})^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$c'(x) = (1, y'(x), z'(x))^T$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx \quad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{(\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2})^3}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Für die **Polarkoordinaten** $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ im \mathbb{R}^2 gilt für $a \leq t \leq b$:

$$c(t) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T, \quad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt$$

Für die **Kugelkoordinaten** $r = r(t), \varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t)$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$c(t) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)^T \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + r^2 \dot{\psi}^2} dt$$

Beispiel: Betrachte die **Kardiode** (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad \text{für } a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardiode gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 8a$$

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: Für die von einer C^1 -Kurve $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z = \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2} \|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad \text{für } 0 \leq i \leq m-1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right) \Delta t_i \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt \end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$x = a\varphi \cos \varphi, \quad y = a\varphi \sin \varphi \quad \text{für } a > 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2} \, d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit $x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$ gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2 \, d\varphi \approx 1.292a^2$$

9.3. Kurvenintegrale

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion und $c : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve. Dann wird das **Kurvenintegral** (oder **Linienintegral**) von $f(x)$ längs c definiert durch

$$\int_c f(x) ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| dt$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s) ds$$

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}\int_{c \circ h} f(x) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| dt \\ &= \int_c f(x) ds\end{aligned}$$

Beispiel.

Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine \mathcal{C}^1 -Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ .

- Für die **Gesamtmasse** des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x) ds = \int_a^b \rho(c(t)) \|\dot{c}(t)\| dt$$

- Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x)x ds}{\int_c \rho(x) ds}$$

- Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x)r^2(x) ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.

10.1. Grundlegende Begriffe

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der Periode T (oder **T -periodisch**), falls

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine **Fourier–Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \dots$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f , so ist auch kT , $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
- Sind T_1 und T_2 Perioden, so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \quad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Perioden von f .

- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f , so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT , $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind $f(t)$ und $g(t)$ T -periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T -periodisch.
- Ist $f(t)$ T -periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Periodische Fortsetzungen.

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt fortsetzen.

- **Direkte Fortsetzung.**

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \leq t < (k + 1)T$$

- **Gerade Fortsetzung.** Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben. Dann setze

$$f(t) := g(t - kT), \quad \text{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T$$

wobei g zunächst an der y -Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- **Ungerade Fortsetzung.** Wie oben, aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

heißt **Fourier-Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**). Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

der Fourier-Reihe heißen **trigonometrische Polynome** vom Grad n .

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt: $a_0 = 2\gamma_0$, $a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$, $b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$.

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

Beweis: Einerseits gilt

$$\langle e^{-ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1,$$

andererseits haben wir

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{il\omega t} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(l-k)\omega t} dt = \frac{1}{i(l-k)\omega} e^{i(l-k)\omega t} \Bigg|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq l$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Satz: Konvergiert die Fourier-Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f(t)$, so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Da f_n **stetig** und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-il\omega t} dt &= \int_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt = \gamma_l \cdot T. \end{aligned}$$

Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in \mathbb{R} .

$$\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ T/2 & : k = l \neq 0 \\ T & : k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ T/2 & : k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$

10.2. Fourier–Reihen

Definition:

- Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen auf $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.
- Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ werden die **Fourier–Koeffizienten** von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die **Kreisfrequenz**.

10.2. Fourier-Reihen

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad \text{für } k > 0$$

Definition: Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier-Reihe** von $f(t)$.

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ zu einer T -periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T -periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(t) \text{ gerade} \Rightarrow a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \Rightarrow a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = -\frac{2}{T} \int_{-T}^0 f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= -\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = -b_k \end{aligned}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die **Sägezahnfunktion**

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin(kt) dt = \frac{1}{k}$$

und man bekommt für die Fourier-Reihe

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π -periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos t}{1^2} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} - + \dots$$

Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, T -periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Linearität:**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha \gamma_k + \beta \delta_k) e^{ik\omega t}$$

- **Konjugation:**

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

- **Zeitumkehr:**

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, T -periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Streckung:**

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \quad \text{für } c > 0$$

- **Verschiebung:**

$$f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\gamma_k e^{ik\omega a}) e^{ik\omega t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- **Ableitung:** Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$f'(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega k (b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t))$$

- **Integration:** Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t) dt = 0$, so folgt

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right)$$

Konvergenzsatz.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch, stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

- In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Es gilt:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Weiterhin gilt:

$$1 + 2 \cos t + \dots + 2 \cos(nt) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)} dt = (t - \pi) + 2 \sin t + 2 \frac{\sin(2t)}{2} + \dots + 2 \frac{\sin(nt)}{n}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Daraus folgt:

$$R_n(t) = \int_{\pi}^t \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{2 \sin(t/2)} dt$$

$$\underline{\text{p.l.}} \quad \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1} \int_{\pi}^t \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin(\tau/2)} \right) d\tau$$

$$\underline{\text{MWS}} \quad \frac{-\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1) \sin(t/2)} + \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right]}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1 \right)$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1) \sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Approximationsgüte im quadratischen Mittel.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihen von f . Für den linearen Raum

$$T_n := \text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t) \right\}$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t) dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. $S_n(t)$ ist die **Bestapproximation** an f aus T_n bezüglich $\|\cdot\|$.

Besselsche Ungleichung und Riemannsches Lemma.

Satz: Es gilt die **Besselsche Ungleichung** $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Folgerung: Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das **Riemannsches Lemma**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k| = 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: Ist eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) stückweise $(m + 1)$ -fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}$$

stetig auf \mathbb{R} , so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Fazit: Je glatter f , desto schneller konvergiert die Fourier-Reihe gegen f .

Beispiel: Bei der Rechteckschwingung $R(t)$ gilt

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null.

Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung: Für $n \rightarrow \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die **Parsevalsche Gleichung** $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

denn die Fourier-Reihe **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen f , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T -periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier-Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \int_0^T g(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \int_0^T g(t) \sin(k\omega t) dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann stimmen f und g auf ganz \mathbb{R} überein, d.h. es gilt $f \equiv g$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

Ausgangssituation: Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden **Numerische Quadratur (Quadraturformel)** der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit

- **Knoten:** $x_i \in [a, b]$ für $i = 0, 1, \dots, n$,
- **Gewichten:** g_i für $i = 0, 1, \dots, n$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

11.1. Newton–Cotes Formeln

Grundidee: Verwende Interpolationspolynom p_n zu den Daten

$$(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{mit } L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ergebnis: Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

Konstruktion der Newton–Cotes Formeln.

Vereinfachung: Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \text{wobei } h = (b - a)/n$$

Ergebnis: Newton–Cotes–Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - j}{i - j} dx \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Die Trapezregel.

Wähle $n = 1$, $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\alpha_{01} = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Daraus folgt die **Trapezregel**:

$$I[f] \approx I_1[f] = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Die Simpsonregel.

Wähle $n = 2$ und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\alpha_{02} = \frac{1}{4} \int_0^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{6}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{4} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{6}$$

Daraus folgt die **Simpsonregel**

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right)$$

Zwei weitere Newton–Cotes–Formeln.

- 3/8–Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right)$$

- Milne–Regel.

$$I_4[f] = \frac{b-a}{90} \left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right) + 32f\left(a + 3\frac{b-a}{4}\right) + 7f(b) \right)$$

Quadraturfehler der Newton–Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$ heißt **Quadraturfehler** der Quadraturformel $I_n[f]$.

Erinnerung: Darstellung für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Beispiel: Für den Quadraturfehler der Trapezregel ($n = 1$) gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x)) dx = - \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x-a)(x-b) dx \\ &= - \frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi})(b-a)^3 \end{aligned}$$

Zusammengesetzte Newton–Cotes Formeln.

Ziel: Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}$$

Verwende auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ Quadraturformel der Ordnung n .

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) \\ &= h \left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right) \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung der zusammengesetzten Trapezregel.

Satz: Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) \|f^{(2)}\|_\infty$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x) dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\ &\leq \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12} (b-a) \|f^{(2)}\|_\infty \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpson-Regel.

Wende die Simpson-Regel auf die Teilintervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \quad \text{für } 0 \leq i \leq N/2 - 1$$

wobei N gerade.

Dann bekommt man die **zusammengesetzte Simpson-Regel**

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 4f(b-h) + f(b)) \end{aligned}$$

Satz: Für die zusammengesetzte Simpson-Regel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{2880} (b-a) \|f^{(4)}\|_\infty$$

11.2. Gauß-Quadratur

Erinnerung: Mit der Newton-Cotes Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n g_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

werden Polynome vom Grad n **exakt** integriert, denn es gilt für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Dabei sind die Knoten x_i , $0 \leq i \leq n$, **äquidistant** auf $[a, b]$ verteilt.

Grundidee der Gauß-Quadratur: Variiere die Knoten x_0, \dots, x_n .

Grundidee der Gauß-Quadratur.

Ziel:

Variiere Knoten, um Polynome möglichst hohen Grades exakt zu integrieren.

Genauer:

Approximiere für eine feste positive **Gewichtsfunktion** $w : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b f(x)w(x) dx$$

durch Quadratur der Form

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)w(x_i)$$

mit einer **speziellen** Wahl von Stützstellen x_i und **positiven** Gewichten w_i .

Ergebnis: **Gaußsche Quadraturformeln** mit $(n + 1)$ Knoten integrieren Polynome vom Grad $2n + 1$ exakt.

Beispiel: Gauß–Tschebyscheff–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
- **Knoten:** Nullstellen

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

des $(n+1)$ -ten **Tschebyscheff–Polynoms**

$$T_{n+1} = \cos((n+1) \arccos(x)) \in \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Konstante Gewichte:** $w_i = \pi/(n+1)$.
- **Gauß–Tschebyscheff–Quadratur:**

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^1 f(x)w(x) dx$$

Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome.

Satz: Die Tschebyscheff–Polynome T_0, \dots, T_n bilden eine orthogonale Basis des Polynomraums \mathcal{P}_n bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f, g)_w := \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx$$

Genauer gilt

$$(T_k, T_j)_w = \begin{cases} \pi & \text{für } k = j = 0 \\ \pi/2 & \text{für } k = j > 0 \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases}$$

Beweis: Übung (mit Substitution $t = \cos x$)

Satz: Für die Tschebyscheff–Polynome gilt die Rekursionsformel

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{für } k \geq 1,$$

wobei $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$.

Legendre-Polynome.

Satz: Für die Gewichtsfunktion $w = 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind die Legendre-Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \in \mathcal{P}_n$$

Orthogonalpolynome. Genauer gilt:

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} 2/(2n+1) & \text{für } n = m \geq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Beweis: Übung (per Induktion).

Satz: Für die Legendre-Polynome gilt die Rekursionsformel

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1,$$

wobei $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = x$.

Die ersten Legendre–Polynome $L_n(x)$, $n \geq 2$.

Die ersten Legendre–Polynome sind gegeben durch

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

Deren jeweilige Nullstellen sind gegeben durch

$$L_2 : x_{0/1} = \pm\sqrt{3}$$

$$L_3 : x_0 = 0, x_{1/2} = \pm\sqrt{3/5}$$

$$L_4 : x_{0/1/2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{\frac{24}{5}}}$$

Zur Konstruktion der Gauß–Legendre–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1$.
- **Knoten:** $n + 1$ Nullstellen x_0, \dots, x_n des Legendre–Polynoms $L_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- **Gewichte:** Mit festen Knoten x_0, \dots, x_n zu berechnen aus

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx > 0$$

- **Gauß–Legendre–Quadratur:**

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Weitere Spezialfälle der Gauß-Quadratur.

Name	Intervall	Gewicht
Gauß-Legendre	$[-1, 1]$	$w(x) = 1$
Gauß-Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
Gauß-Jacobi	$[-1, 1]$	$w(x) = (1-x)(1+x)$
Gauß-Laguerre	$[0, \infty]$	$w(x) = e^{-x}$
Gauß-Hermite	$[-\infty, \infty]$	$w(x) = e^{-x^2}$

Zur Konstruktion der Gauß-Quadraturformeln.

- Konstruiere zu festem Intervall $[a, b]$ und Gewichtsfunktion w eine Folge

$$p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$$

von Orthogonalpolynomen, wobei $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $(p_k, p_j)_w = \delta_{kj}$.

- Verwende Nullstellen x_0, x_1, \dots, x_n von p_{n+1} als Knoten.
- Berechne (positive) Gewichte

$$w_i = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- **Ergebnis:** Gauß-Quadraturformel

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx I_w[f] = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

mit $I_n[f] = I_n[p]$ für alle $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

11.3. Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Berechne die Fourier-Koeffizienten einer 2π -periodischen Funktion $f(t)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

mittels einer **numerischen Quadraturformel**.

Zusammengesetzte Trapezregel (**Trapezsumme**): Setze

$$t_j = \frac{2\pi}{n} j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

$$h = \frac{2\pi}{n} \quad (\text{Schrittweite})$$

$$f_j = f(t_j) \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

11.3. Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Aufgrund der Periodizität von $f(t)$ gilt $f_n = f_0$ und die Trapezsumme liefert dann

$$\begin{aligned} a_k &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \left\{ \frac{f_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \cos(kt_j) + \frac{f_n}{2} \right\} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cos(kjh) =: A_k \end{aligned}$$

und analog

$$b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sin(kjh) =: B_k$$

Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$S_m(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$$

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Klausur zur Analysis II und hoffe, dass Ihnen die Vorlesung Spaß gemacht hat!