Fachbereich Mathematik **Wise 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Mathematik II, (Modul: Analysis II)

1. März 2021

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:

AI	BU	BVT	ET	EUT	IN/IIW	LM	MB	MTB/MEC	OS	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4+ 2 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k+1} .$$

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) := \frac{2}{3+5x},$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: (4+2+2 Punkte)

a) Mit $a_k = \dfrac{1}{k+1}$ rechnet man

$$\begin{aligned} r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}} &= 1 \,. \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert in $]1,3[$. Im Randpunkt $x_1 = 1 = 2-1$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} .$$

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, auch wenn der ersten Summand fehlt. Daher konvergiert die Reihe für $x = 1$.

Im Randpunkt $x_2 = 3 = 2+1$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)}{k+1} .$$

Die harmonische Reihe divergiert, auch wenn der ersten Summand fehlt. Daher divergiert die Reihe für $x = 3$.

Die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [1,3)$ gilt. **(2 Punkte)**

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3+5x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{3}x} \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{5}{3}x)} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}x \right)^k \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}(-1)^k \frac{5^k}{3^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \cdot 5^k}{3^{k+1}} \, x^k \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Gegeben sind folgende Daten einer Funktion $f : [1,6] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$.

x_k	1	3	6
$f(x_k) = y_k$	-1	1	7

Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion f zu den gegebenen Daten.

Lösung: Das Interpolationspolynom kann

- mit Hilfe der Lagrange-Polynome

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)} f(1) + \frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)} f(3) + \frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)} f(6) \\
&= \frac{x^2-9x+18}{10} \cdot (-1) + \frac{x^2-7x+6}{-6} \cdot (1) + \frac{x^2-4x+3}{15} \cdot 7 = \\
&= \frac{(-3-5+14)x^2 + (27+35-56)x + (-54-30+42)}{30} \\
&= \frac{6x^2+6x+42}{30} = \frac{x^2+x-7}{5}
\end{aligned}$$

- mit dem Ansatz $p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-3)$ durch Lösen der Gleichungen

$$y_0 = -1 = a_0, \qquad y_1 = 1 = a_0 + a_1(3-1) = -1 + 2a_1 \iff a_1 = 1\,,$$
$$y_2 = 7 = a_0 + a_1(6-1) + a_2(6-1)(6-3) = -1 + 5 + 15a_2 \iff$$
$$3 = 15a_2 \iff a_2 = \tfrac{1}{5}\,,$$

- oder durch Berechnung der dividierten Differenzen bestimmt werden:

$$\begin{array}{cccc}
x_j & y_j = [y_j] & [y_{j-1,j}] & [y_{j-2,j}] \\
\hline
1 & -1 & & \\
 & & \dfrac{1-(-1)}{3-1} = 1 & \\
3 & 1 & & \dfrac{2-1}{6-1} = \dfrac{1}{5} \\
 & & \dfrac{7-1}{6-3} = 2 & \\
6 & 7 & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= -1 + 1 \cdot (x - x_0) + \frac{1}{5}(x-x_0)(x-x_1) \\
&= -1 + (x-1) + \frac{1}{5}(x-1)(x-3)\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers K, der bei der Drehung des Funktionsgraphen von

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; (x+1)\sqrt{\cos(x)}$$

um die x-Achse entsteht.

Lösung: (4 Punkte) Volumen

$$V \;=\; \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 \, dx \;=\; \pi \int_0^{\pi/2} (x+1)^2 \cdot \cos(x)\, dx\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Partielle Integration: Mit $u(x) = x^2 + 2x + 1$ und $v(x) = \sin(x)$ liefert:

$$V \;=\; \pi \left((x^2 + 2x + 1) \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} \;-\; \int_0^{\pi/2} (2x+2) \sin(x)\, dx \right) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi + 1 - [(2x+2)(-\cos(x))]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2(-\cos(x))\, dx \right)$$

$$= \; \pi \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi + 1 - 2 + [-2\sin(x)]_0^{\pi/2} \right) \;=\; \pi \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi - 1 - 2 \right) \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

$$= \; \frac{\pi^3}{4} + \pi^2 - 3\pi\,.$$

Aufgabe 4: (7 Punkte) Gegeben ist die Kurve

$$\boldsymbol{c} : [0,\, 1] \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad c : t \longmapsto \ (4\cos(t), 4\sin(t), 3t)^T \ .$$

Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) := \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} \cdot \frac{6z}{5}$ das Integral von f längs $\boldsymbol{c}$.

Lösung:

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) \ = \ (-4\sin(t), 4\cos(t), 3)^T \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\| \ = \ \sqrt{16(\sin^2(t)+\cos^2(t))+9)} \ = \ \sqrt{25} = 5 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$f(\,\boldsymbol{c}\,(t)) = \sqrt{16\cos^2(t)+16\sin^2(t)+9t^2} \cdot \tfrac{18t}{5} = \sqrt{16+9t^2} \cdot \tfrac{18t}{5} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_{\boldsymbol{c}} f\, ds \ = \ \int_0^1 f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{16+9t^2}\, \frac{18t}{5} \cdot 5\, dt \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \ \int_0^1 \sqrt{16+9t^2} \cdot 18t\, dt \qquad u = 16+9t^2,\ \frac{du}{dt} = 18t \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \ \int_{16}^{25} \sqrt{u}\, du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{16}^{25} = \frac{2}{3}\,(\sqrt{25}^3 - \sqrt{16}^3) \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

$$= \ \frac{2}{3}\,(5^3 - 4^3) = \frac{2}{3}\,(125-64) = \frac{122}{3}\ .$$

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!