Fachbereich Mathematik **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Mathematik II
(Modul: Analysis II)
3. September 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:

AI	BU	BVT	ET	EUT	IN/IIW	LM	MB	MTB/MEC	OS	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}, & x \neq 0\,, \\ \frac{1}{2} & x = 0\,. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Wie lautet demnach das Taylorpolynom zweiten Grades zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

Lösung:

a) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \cdot \frac{x^{2k-2}}{(2k)!}$$

Offensichtlich liefert die Potenzreihe auch für $x = 0$ den Funktionswert $f(0) = (-1)^{1-1} \cdot \frac{0^{2-2}}{2!} = \frac{1}{2}$. **[3 Punkte]**

b)

$$T_2(x;0) = (-1)^{1-1} \cdot \frac{x^{2-2}}{2!} + (-1)^{2-1} \cdot \frac{x^{4-2}}{4!} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}\,.$$

[1 Punkt]

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Gegeben sind folgende Daten einer Funktion $g : [0,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = g(x)$.

x_k	0	1	3
$g(x_k) = y_k$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion g zu den gegebenen Daten.

b) Es sei bekannt, dass $|g'''(x)| \leq \frac{1}{4}$ für alle $x \in [0,3]$ gilt. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ gilt:

$$|g(2) - p_2(2)| \leq \frac{1}{12}\,.$$

c) Zeigen Sie, dass $g(2)$ im Intervall $[\frac{3}{12}, \frac{5}{12}]$ liegt.

Lösung:

a) Das Interpolationspolynom kann

- mit Hilfe der Lagrange-Polynome
$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}g(0) + \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}g(1) + \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}g(3) \\ &= \frac{x^2-4x+3}{3} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} \cdot 0 + \frac{x^2-x}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{-x^2+4x-3}{6} + \frac{x^2-x}{12} = -\frac{x^2}{12} + \frac{7x}{12} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$
- mit dem Ansatz $p(x) = a_0 + a_1(x-0) + a_2(x-0)(x-1)$ durch Lösen der Gleichungen
$$\begin{aligned} &y_0 = -\tfrac{1}{2} = a_0, \\ &y_1 = 0 = a_0 + a_1(1-0) = -\tfrac{1}{2} + a_1 \iff a_1 = \tfrac{1}{2}\,, \\ &y_2 = \tfrac{1}{2} = a_0 + a_1(3-0) + a_2(3-0)(3-1) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} + 6a_2 \iff \\ &\quad -\tfrac{1}{2} = 6a_2 \iff a_2 = -\tfrac{1}{12}\,, \end{aligned}$$

- oder durch Berechnung der dividierten Differenzen

x_j	$y_j = [y_j]$	$[y_{j-1,j}]$	$[y_{j-2,j}]$
0	$-\frac{1}{2}$		
		$\frac{0-(-\frac{1}{2})}{1-0} = \frac{1}{2}$	
1	0		$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{3-0} = -\frac{1}{12}$
		$\frac{\frac{1}{2}-0}{3-1} = \frac{1}{4}$	
3	$\frac{1}{2}$		

bestimmt werden.

Man erhält

$$p_2(x) \;=\; -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,(x-x_0)-\frac{1}{12}(x-x_0)(x-x_1) \;=\; -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{12}x(x-1)\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

b)

$$\begin{aligned} |p_2\,(2)-g(2)| \;&= \frac{1}{3!}\cdot\left|g^{(3)}(\theta)\cdot(2-x_0)(2-x_1)(2-x_2)\right| \\ &\le \left|\frac{\frac{1}{4}}{6}(2\cdot 1\cdot(-1))\right| \;=\; \frac{1}{12}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

c) Nach a) gilt $p(2) = -\frac{1}{2}+\frac{2}{2} - \frac{1}{12}\cdot 2(2-1) \;=\; \frac{1}{3}$

und nach b) gilt

$g(2) \in\; [p(2)-\frac{1}{12}\,,\,p(2)+\frac{1}{12}] \;=\; [\frac{3}{12}\,,\,\frac{5}{12}]$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie $$\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 + 4x + 5)\,\sin(\pi x)\,dx\,.$$

Lösung:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 + 4x + 5)\,\sin(\pi x)\,dx \qquad \text{(Partielle Integration: } u = 3x^2 + 4x + 5, \dot{v} = \sin \pi x)$$

$$=(3x^2 + 4x + 5)\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} (6x + 4)\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\,dx$$

$$=(\frac{3}{4} + 2 + 5)\frac{-\cos(\frac{\pi}{2})}{\pi} - 5\frac{-\cos(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (6x + 4)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=0 + \frac{5}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\left[(6x + 4)\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 6\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,dx\right)$$

$$=\frac{5}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\big((3 + 4)\sin(\frac{\pi}{2}) - 4\sin(0)\big) - \frac{6}{\pi^2}\Big[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{\pi} + \frac{7}{\pi^2} + \frac{6}{\pi^3}[\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0)]$$

$$=\frac{5}{\pi} + \frac{7}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^3}\,.$$

[Ansatz : 1 Punkt, Rechnung : 4 Punkte]

Aufgabe 4: (6 Punkte) Gegeben ist die Kurve

$$\boldsymbol{c} : [\sqrt{3}, \sqrt{8}] \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad c : t \longmapsto \left(3t^2, 2t^3\right)^T .$$

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve.

b) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\quad f(x,y) := \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3y}{2x}\right)^2}}$ das Integral von f längs $\boldsymbol{c}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{c}}(t) &= (6t, 6t^2)^T \\ \|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\| &= \sqrt{36t^2 + 36t^4} = 6t\sqrt{1+t^2} \end{aligned} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned} \text{Kurvenlänge} = L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\|\, dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} 6t\sqrt{1+t^2}\, dt \\ &\text{Substitution: } u = 1+t^2 \Rightarrow du = 2t\, dt \\ &= 6\int_{u(\sqrt{3})}^{u(\sqrt{8})} \sqrt{u}\,\frac{1}{2}\, du = 3\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^9 \\ &= 2((\sqrt{9})^3 - (\sqrt{4})^3) = 2\cdot(27-8) = 38. \end{aligned} \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3y}{2x}\right)^2}} \qquad \wedge \qquad c(t) = (3t^2, 2t^3)^T \Longrightarrow$

$$f(\,\boldsymbol{c}\,(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3\cdot 2t^3}{2\cdot 3t^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{c}} f\, ds &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\| dt \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 6t\sqrt{1+t^2} dt = 3t^2\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \\ &= 3(8-3) = 15. \end{aligned} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!