

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0. \end{cases}$

Ist der Mittelwertsatz $g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ mit $x_0 \in]a, b[$ für $a = -2$ und $b = 2$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0 .

Aufgabe 2:

Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

- $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = 1 - x^2$,
- $[a, b] = [-\pi, 0]$ und $f_2(x) = \cos \frac{x}{2}$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die durch $f(x) = \frac{4}{2x+5}$ definierte Funktion.

- a) Man zeichne die Funktion f .
- b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 4 \cdot 2^k \cdot k!}{(2x+5)^{k+1}}.$$

- c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.
- d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Kugel vom Radius R . Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Abgabetermin: 8.4. - 12.4.19 (zu Beginn der Übung)