Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Uneigentliche Integrale

Definition:

Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ in jedem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b[$ mit $c < b$ beschränkt und stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen.

a) **Singularität an einer Grenze, z.B. Polstelle in** b

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

b) **einseitig unbeschränkter Definitionsbereich,** '$b = \infty$'

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

Falls der entsprechende Grenzwert existiert,

so heißt das uneigentliche Integral **konvergent**,

sonst **divergent**.

Für die untere Integrationsgrenze, d.h. $f :]a, b] \to \mathbb{R}$,

werden entsprechende uneigentliche Integrale definiert.

Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

Definition:

Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ heißt **absolut konvergent**, falls $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ konvergiert.

Satz: Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

a) Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

b) **Majorantenkriterium**:

Gilt für alle x: $|f(x)| \leq g(x)$, dann gilt:

$$\int\limits_a^b g(x)dx \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{absolut konvergent.}$$

c) **Minorantenkriterium**:

Gilt für alle x: $0 \leq g(x) \leq f(x)$, dann gilt:

$$\int\limits_a^b g(x)dx \quad \text{divergent} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{divergent}\ .$$

Aufgabe 25:

a) Man berechne die uneigentlichen Integrale, falls sie existieren

(i)
$$\int_1^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{4}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon}^{9}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} 12((9-1)^{1/3} - \varepsilon^{1/3}) = 24$$

Das Integral existiert.

(ii)
$$\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{2}{(x+1)^{3/4}}\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} 8(x+1)^{1/4}\Big|_0^a$$
$$= \lim_{a\to\infty} 8((a+1)^{1/4} - 1) = \infty$$

Das Integral existiert nicht.

b) Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx}_{\text{endlicher Wert}} + \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$$

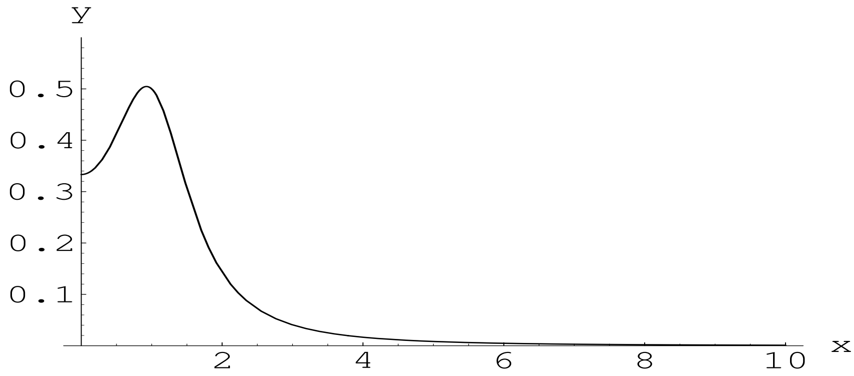

Bild 25 b): Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^5+3}$

Konvergenzuntersuchung für $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx$

Für $x \geq 1$ gilt $\quad 0 \leq \dfrac{x^2+1}{x^5+3} \leq \dfrac{x^2+x^2}{x^5} = \dfrac{2}{x^3}$

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{x^2+1}{x^5+3}\,dx \leq \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x^2}\bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = 1$$

absolute Konvergenz nach dem Majorantenkriterium

(ii) Für $\quad 0 \leq x \leq 1 \quad$ gilt $\quad x^{7/2} \leq x^{5/2}$:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4 + x^3}\, dx &= \lim_{a \to 0} \int\limits_a^1 \frac{1}{x^{7/2} + x^{5/2}}\, dx \\
&\geq \lim_{a \to 0} \int\limits_a^1 \frac{1}{x^{5/2} + x^{5/2}}\, dx \\
&= \lim_{a \to 0} -\frac{1}{3x^{3/2}}\Bigg|_a^1 \\
&= \lim_{a \to 0} \frac{1}{3a^{3/2}} - \frac{1}{3} = \infty\,.
\end{aligned}
$$

Das Integral divergiert nach dem Minorantenkriterium.

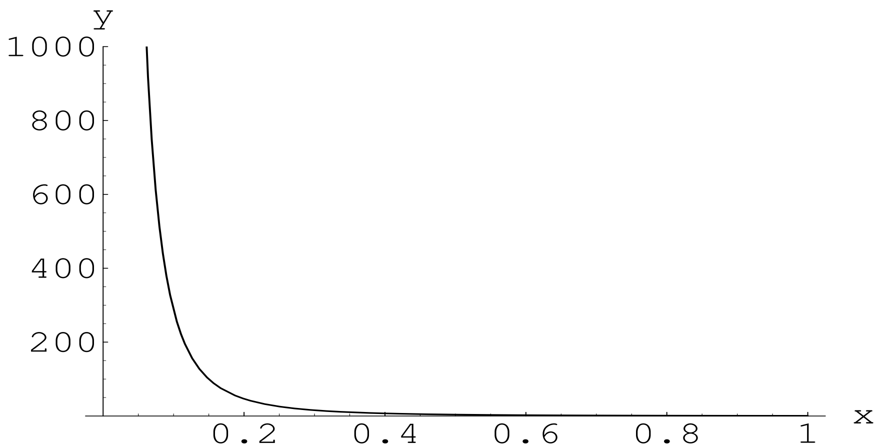

Bild 25 b)(ii): Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^4 + x^3}$

Parameterabhängige Integrale

Die reelwertige Funktion $f(x,y)$ sei in $[a,b] \times [c,d]$ stetig bezüglich x und integrierbar bezüglich y, dann ist das folgende **parameterabhängige Integral** stetig

$$F(x) \;=\; \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,, \quad a \leq x \leq b.$$

Beispiel:

Als **Laplace-Transformierte** zur Funktion $f(t)$ bezeichnet man das vom Parameter $s > 0$ abhängige Integral

$$F(s) \;=\; \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Satz: (Leibniz-Regel)

Ist die Funktion $f(x,y)$ zusätzlich stetig differenzierbar bezüglich x und sind $g(x)$ und $h(x)$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$F'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)$$

$$\;=\; f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x) + \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy\,.$$

Aufgabe 26:

a) Man berechne die Ableitung des parameterabhängigen Integrals

$$F(x) = \int_1^{2x} e^{3x+y}\,dy$$

(i) durch Integration nach y und anschließendes Ableiten nach x,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{2x} e^{3x+y}\,dy = e^{3x+y}\Big|_1^{2x} \\ &= e^{3x+2x} - e^{3x+1} = e^{5x} - e^{3x+1} \qquad \Rightarrow \\ F'(x) &= 5e^{5x} - 3e^{3x+1} \end{aligned}$$

(ii) durch Ableiten nach x und anschließende Integration nach y.

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{3x+2x} \cdot 2 - e^{3x+1} \cdot 0 + \int_1^{2x} 3e^{3x+y}\,dy \\ &= 2e^{5x} + 3e^{3x+2x} - 3e^{3x+1} \\ &= 5e^{5x} - 3e^{3x+1} \end{aligned}$$

b) Man berechne für $f(t) = \cos(\gamma t)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ die Laplace-Transformierte für $s > 0$

$$F(s) \ = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\ .$$

Die Berechnung erfolgt über partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt \ &= \ -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^a - \int_0^a \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\,dt \\
&= \ -\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^a + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^a \\
&\qquad - \int_0^a \gamma^2\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\,dt \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt &= \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\cos(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s} + \gamma\sin(\gamma t)\frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^a\right) \\
&= \frac{e^{-sa}}{1+\gamma^2/s^2}\left(-\frac{\cos(\gamma a)}{s} + \frac{\gamma\sin(\gamma a)}{s^2}\right) + \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{a\to\infty}\int_0^a \cos(\gamma t)e^{-st}\,dt \ = \ \frac{1}{1+\gamma^2/s^2}\cdot\frac{1}{s} \ = \ \frac{s}{s^2+\gamma^2}$$

Rotationskörper

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

Bei **Rotation** des Funktionsgraphen von f **um die x-Achse** erhält man

a) **Volumen eines Rotationskörpers**

$$V_{x-\text{Achse}} = \pi \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2\, dx$$

b) **Mantelfläche eines Rotationskörpers**

$$M_{x-\text{Achse}} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Entsprechend erhält man das Volumen eines Rotationskörpers bei **Rotation** von f **um die y-Achse**

$$V_{y-\text{Achse}} = \pi \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2\, dy\,.$$

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Funktion

$$f \;:\; [0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x \,.$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

partielle Integration und Additionstheorem ergeben

$$\int (\sin x)^2\, dx = \int \sin x \sin x\, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (\cos x)^2\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 - (\sin x)^2\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int (\sin x)^2\, dx + \tilde{C} \qquad \Rightarrow$$

$$\int (\sin x)^2\, dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x) + C$$

Damit erhält man

$$V_{x-\text{Achse}} \;=\; \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 \; dx = \pi \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \; dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\,(x - \sin x \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$$

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

Bei Rotation um die y-Achse ist der Abstand vom Funktionsgraphen zur y-Achse gegeben durch

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y.$$

Substitution $y = \sin x$ und partielle Integration ergeben

$$\begin{aligned}
V_{y-\text{Achse}} &= \pi \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 \, dy = \pi \int\limits_0^1 (\arcsin y)^2 \, dy \\
&= \pi \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx \\
&= \pi \left(x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int\limits_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \right) \\
&= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} + 2x \cos x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos x \, dx \right) \\
&= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi
\end{aligned}$$

c) Man berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

Substitution und $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ergeben

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+s^2}\,ds &\overset{s=\sinh t}{=} \int \cosh^2 t\,dt \\
&= \sinh t\cosh t - \int \sinh^2 t\,dt \\
&= \sinh t\cosh t + t - \int \cosh^2 t\,dt + \tilde{C} \\
\Rightarrow \quad \int \sqrt{1+s^2}\,ds &= \frac{1}{2}\left(s\sqrt{1+s^2} + \text{arsinh } s\right) + C
\end{aligned}$$

Die Mantelfläche berechnet sich dann durch:

$$\begin{aligned}
M_{x-\text{Achse}} &= 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \\
&= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \\
&\overset{s=\cos x}{=} -2\pi \int\limits_1^0 \sqrt{1+s^2}\,ds \\
&= \pi\left(s\sqrt{1+s^2} + \text{arsinh } s\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \text{arsinh}1\right)
\end{aligned}$$

d) Man zeichne die Mantelfächen der Rotationskörper aus a) und b) mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezsurf'.

Der Vektor des Funktionsgraphen

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq x \leq \pi/2$ und $f(x) = \sin x$ muss in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden

$$\boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Multiplikation von $\boldsymbol{v}(x)$ mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}(\varphi)$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ für eine ganze Umdrehung um die x-Achse.

Parameterdarstellung der Mantelfläche

$$\boldsymbol{u}_{x-\text{Achse}}(x, \varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x \\ \cos\varphi \sin x \\ \sin\varphi \sin x \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 27 a) lautet:

```
ezsurf('x','cos(p)*sin(x)','sin(p)*sin(x)'
       ,[0,2*pi,0,pi/2])
```

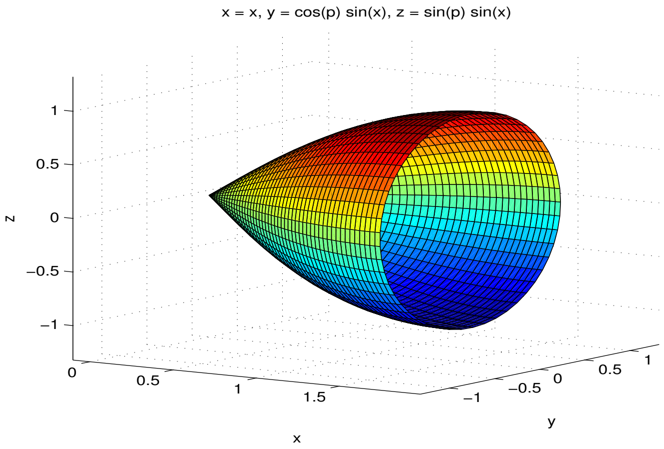

Bild 27 a) Rotation um die x-Achse

$$\boldsymbol{u}_{y-\text{Achse}}(x,\varphi) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}(\varphi)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}(x)} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ \sin x \\ x\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der MATLAB Plotbefehl für Bild 27 b) lautet:

```
ezsurf('x*cos(p)','sin(x)','x*sin(p)'
       ,[0,2*pi,0,pi/2])
```

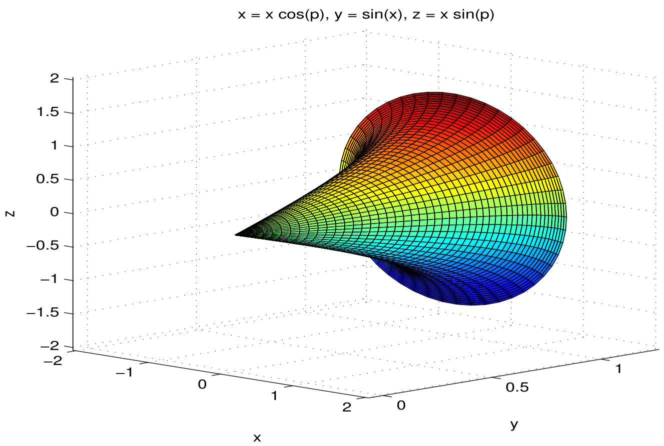

Bild 27 b) Rotation um die y-Achse

Kurven und Bogenlänge

Definition:
Eine stetige Funktion

$$\mathbf{c} : [a,b] \ \to \ \mathbb{R}^n \,, \qquad t \mapsto \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

heißt **Kurve** bzw. **Parameterdarstellung einer Kurve**.

t heißt der **Parameter** und $[a,b]$ das **Parameterintervall**.
$\mathbf{c}(a) = (x_1(a), \cdots, x_n(a))^T$ heißt **Anfangspunkt** und
$\mathbf{c}(b) = (x_1(b), \cdots, x_n(b))^T$ **Endpunkt** der Kurve.

Der **Tangentenvektor**

$$\dot{\mathbf{c}}(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h} = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))^T$$

der Kurve $\mathbf{c}$ an der Parameterstelle t.

Ist jede Koordinatenfunktion $c_i(t)$ stetig differenzierbar, so bezeichnet man $\mathbf{c}$ als C^1**-Kurve**.

Beispiele für Parameterdarstellungen

a) **Funktionsgraph** einer Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \,, \quad x \in [a,b]$$

b) **Geradengleichung im $\mathbb{R}^n$**

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{r}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ortsvektor: $\boldsymbol{a}$, Richtungsvektor: $\boldsymbol{r}$

Für Geraden durch die Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ wähle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

c) **Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$**

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

d) **Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$**

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}\,, \quad t \in [0, 6\pi]\,,\ a \in \mathbb{R}.$$

```
ezplot3('cos(t)','sin(t)','t',[0,6*pi])
```

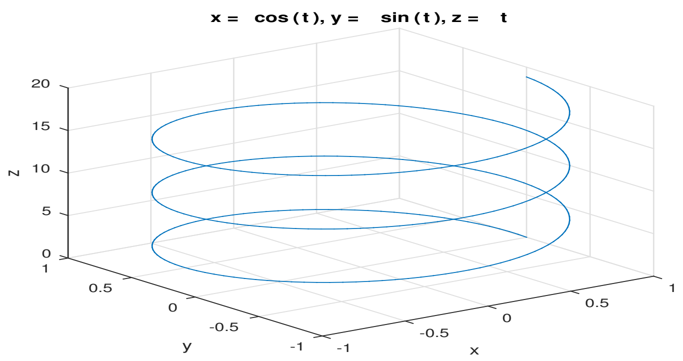

Bild Schraubenlinie c

Die **Bogenlänge** einer Kurve $\mathbf{c}$ im Intervall $[a, t]$ berechnet man durch

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b ||\dot{\mathbf{c}}(t)||\, dt \quad (> 0)\,.$$

Aufgabe 28:

Man berechne die Bogenlängen der folgenden Kurven $\mathbf{c}$ und zeichne die Kurven.

a) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}, \ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{t}/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{c}) &= \int_0^1 ||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 \, dt = \int_0^1 \sqrt{(2)^2 + (3\sqrt{t}/2)^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{16+9t} \, dt \overset{x=16+9t}{=} \frac{1}{18} \int_{16}^{25} \sqrt{x} \, dx \\ &= \frac{1}{27} x^{3/2} \Big|_{16}^{25} = \frac{1}{27} \left((25)^{3/2} - (16)^{3/2} \right) = \frac{61}{27} \end{aligned}$$

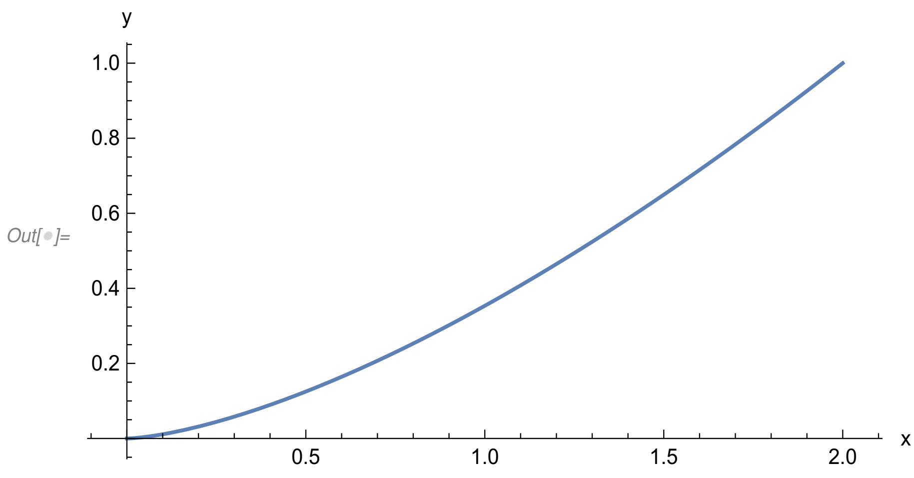

Bild 28 a) $\mathbf{c}(t) = (2t, t^{3/2})^T$

b) $$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/10 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 8\pi] \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

$$||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1/10)^2} = \frac{\sqrt{101}}{10}$$

$$L(\mathbf{c}) \ = \ \int\limits_0^{8\pi} ||\dot{\mathbf{c}}(t)||_2 \, dt \ = \ \int\limits_0^{8\pi} \frac{\sqrt{101}}{10} \, dt$$

$$= \ \frac{t\sqrt{101}}{10}\Bigg|_0^{8\pi} = \frac{4\pi\sqrt{101}}{5}$$

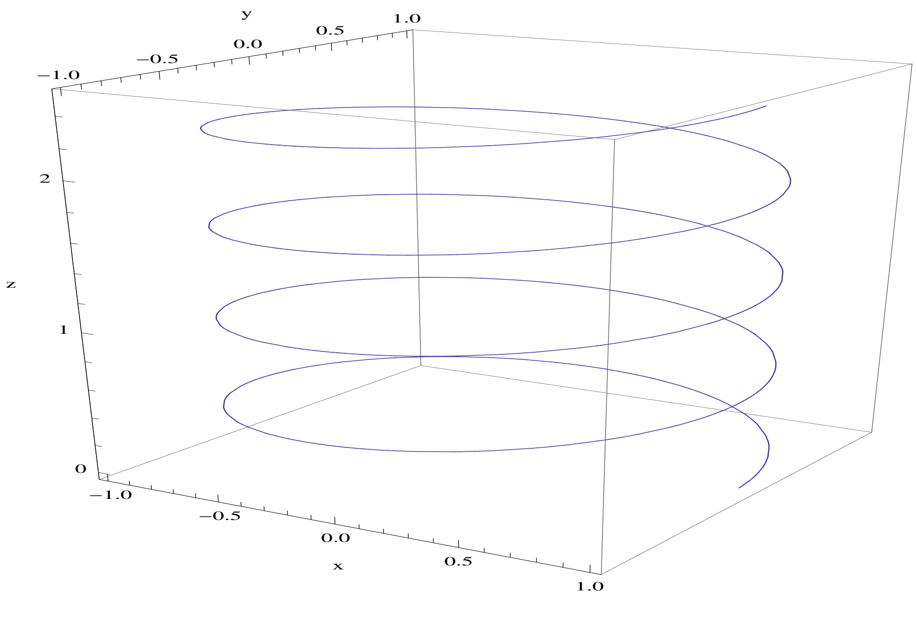

Bild 28 b): $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t/10)^T$