Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{3}{5-2x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{6x^3-3x^2+2x-3}{2x-1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Lösung:

a) Substitution: $t = 5-2x \quad \to \quad dt = -2\,dx$

$$\int \frac{3}{5-2x}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{3}{2}\ln|t| + C = -\frac{3}{2}\ln|5-2x| + C$$

b) Substitution: $t = 7x-4 \quad \to \quad dt = 7\,dx$

$$\int \frac{1}{(7x-4)^2}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{7}t^{-1} + C = -\frac{1}{7(7x-4)} + C = \frac{1}{28-49x} + C$$

c) Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(6x^3-3x^2+2x-3) : (2x-1) = 3x^2+1-\dfrac{2}{2x-1} \\
\underline{-(6x^3-3x^2)\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 2x \quad -3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(2x \quad -1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2
\end{array}$$

$$\int \frac{6x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{2x - 1}\,dx = \int 3x^2 + 1 - \frac{2}{2x-1}\,dx$$

Substitution: $t = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad dt = 2\,dx$

$$= x^3 + x - \int \frac{1}{t}\,dt + C = x^3 + x - \ln|t| + C = x^3 + x - \ln|2x-1| + C$$

d) $$\int \frac{5}{x^2+2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2 + 1}\,dx$$

Substitution: $t = \frac{x}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; dx = \sqrt{2}\,dt$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan(t) + C = \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $$\int \frac{5x}{2x^2+2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Substitution: $t = x^2 + 1 \;\rightarrow\; dt = 2x\,dx$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{4}\ln|t| + C = \frac{5}{4}\ln|x^2+1| + C$$

f) $$\int \frac{6x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{3(2x+4) - 12}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$= 3\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx - 12\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

Substitution: $t = x + 2 \;\rightarrow\; dt = dx$

$$= 3\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 12\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Substitution: $u = t^2 + 1 \;\rightarrow\; du = 2t\,dt$

$$= 3\int \frac{1}{u}\,du - 12\arctan t = 3\ln|u| - 12\arctan t + C$$
$$= 3\ln|t^2+1| - 12\arctan(x+2) + C = 3\ln|x^2+4x+5| - 12\arctan(x+2) + C$$

Integration rationaler Funktionen

Schritte zur reellen Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die durch die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ definierte gebrochen rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} .$$

a) **Polynomdivision**

Falls $\deg P \geq \deg Q$ führe eine Polynomdivision mit polynomialem Anteil $p(x)$ und Rest $r(x)$ durch:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} ,$$

wobei $\deg p = \deg P - \deg Q$ und $\deg r < \deg Q$.

b) **Faktorisierung von Q**

$$Q(x) = c(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} q_1^{\ell_1}(x) \cdots q_m^{\ell_m}(x)$$

Dabei sind $q_j(x) = (x - a_j)^2 + b_j^2$ quadratische Polynome mit komplexen Nullstellen, also in $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerlegbare Polynome.

c) **Partialbrüche**

(i) zu $(x - x_j)^{k_j}$: $\quad \dfrac{\alpha_{j,1}}{x - x_j} , \dfrac{\alpha_{j,2}}{(x - x_j)^2} , \ldots , \dfrac{\alpha_{j,k_j}}{(x - x_j)^{k_j}}$

(ii) zu $q_j^{\ell_j}(x)$: $\quad \dfrac{\gamma_{j,1}x + \delta_{j,1}}{(x - a_j)^2 + b_j^2} , \dfrac{\gamma_{j,2}x + \delta_{j,2}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^2} , \ldots , \dfrac{\gamma_{j,\ell_j}x + \delta_{j,\ell_j}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^{\ell_j}}$

d) **Partialbruchzerlegungsansatz**

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_{j,1}}{x - x_j} + \frac{\alpha_{j,2}}{(x - x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{j,k_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\gamma_{j,1}x + \delta_{j,1}}{(x - a_j)^2 + b_j^2} + \cdots + \frac{\gamma_{j,\ell_j}x + \delta_{j,\ell_j}}{((x - a_j)^2 + b_j^2)^{\ell_j}} \right)\end{aligned}$$

e) **Berechnung der Unbekannten** $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$

(i) **Koeffizientenvergleich**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz von $r(x)/Q(x)$ mit $Q(x)$ und vergleiche die Koeffizienten des Polynoms $r(x)$ mit denen des durch Kürzen, Ausmultiplizieren und Sortieren nach x-Potenzen entstandenen Polynoms der rechten Seite.

Die Unbekannten $\alpha_{j,i}, \gamma_{j,i}, \delta_{j,i}$ ergeben sich als Lösung des aus dem Koeffizientenvergleich resultierenden Gleichungssystem.

(ii) **Einsetzungsmethode**

Multipliziere den Partialbruchzerlegungsansatz von $r(x)/Q(x)$ mit $Q(x)$ und kürze auf der rechten Seite die Nennerfaktoren gegen die aus $Q(x)$.

Ohne die rechte Seite auszumultiplizieren werden jetzt die reellen Nullstellen x_j und die komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ von $Q(x)$ nacheinander jeweils auf beiden Seiten eingesetzt. Damit lassen sich die Unbekannten $\alpha_{j,k_j}, \gamma_{j,\ell_j}, \delta_{j,\ell_j}$ berechnen.

Durch (ggf. mehrfaches) Ableiten und Wiederholung des obigen Verfahrens ergeben sich die übrigen Unbekannten, falls die linearen oder quadratischen Faktoren von $Q(x)$ in höherer als erster Potenz auftreten.

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Das Integral ergibt sich durch Integration der aus der polynomialen und Partialbruchzerlegung resultierenden Summanden und anschließender Summation der Teilintegrale. Dazu ist die Integration der folgenden Typen erforderlich:

a) **Polynome:** $\displaystyle p(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k x^k$

$$\int p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{s} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

b) **Partialbruchtyp:** $\displaystyle\frac{1}{(x-x_j)^k}$

(i) $k = 1$: $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_j}\,dx = \ln|x-x_j| + C$

(ii) $k \geq 2$: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_j)^k}\,dx = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-x_j)^{k-1}} + C$

c) **Partialbruchtyp:**

$$\frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^\ell} = \frac{c}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell} + (ca+d)\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^\ell}$$

(i) $\ell = 1$: $\displaystyle\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \ln((x-a)^2+b^2) + C$

(ii) $\ell \geq 2$: $\displaystyle\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} + C$

(iii) $\ell = 1$: $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$

(iv) Rekursionsformel für $\ell \geq 2$:

$$I_\ell := \int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx =$$

$$\frac{1}{2(1-\ell)b^2}\left((3-2\ell)\underbrace{\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\,dx}_{=I_{\ell-1}} - \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right) + C$$

Beweis der Rekursionsformel:

$$I_{\ell-1} := \int \frac{(x-a)^2+b^2}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx = \int \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}\,dx \; + \; b^2 I_\ell$$

partielle Integration: $u = \dfrac{(x-a)}{2}$ und $v' = \dfrac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}$

$\Rightarrow \quad u' = \dfrac{1}{2} \quad$ und $\quad v = \dfrac{1}{1-l}\cdot\dfrac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}$

$$\int \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^\ell}dx = \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)}I_{\ell-1}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\ell-1} = \frac{1}{2(1-l)}\cdot\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-l)}I_{\ell-1} \; + \; b^2 I_\ell$$

$$\Rightarrow \quad I_\ell \; = \; \frac{1}{b^2}\left(I_{\ell-1}\left(1+\frac{1}{2(1-l)}\right) - \frac{1}{2(1-l)}\cdot\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right)$$

$$= \; \frac{1}{2(1-l)b^2}\left((3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{\ell-1}}\right)$$

Aufgabe 22:

Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx\,.$

Lösung:

a) Nennerfaktorisierung: $3x^2+15x-18 = 3(x^2+5x-6) = 3(x-1)(x+6)$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3x^2+15x-18} = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{x^2+5x-6}\right) = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{(x-1)(x+6)}\right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{1}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+6)+B(x-1)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1+6)+B(1-1) = 7A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{7}$$

$$x=-6 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(-6+6)+B(-6-1) = -7B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{7}{3x^2+15x-18}\,dx \;=\; \frac{7}{3}\int \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{7}\frac{1}{x+6}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| - \ln|x+6|\right) + C$$

b) Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^3+x^2-35x+17):(x^2+6x-7)=x-5+\dfrac{2x-18}{x^2+6x-7}\\
\underline{-(x^3+6x^2-7x)}\\
\qquad -5x^2-28x+17\\
\qquad \underline{-(-5x^2-30x+35)}\\
\qquad\qquad 2x-18
\end{array}
$$

Nennerfaktorisierung: $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{2x-18}{x^2+6x-7}=\frac{2x-18}{(x-1)(x+7)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+7}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-18=A(x+7)+B(x-1)=(A+B)x+7A-B$$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$2x-18=(A+B)x+7A-B$$

$-18=7A-B \quad\Rightarrow\quad B=7A+18$

$2=A+B=A+7A+18=8A+18$

$\Rightarrow \quad 8A=-16 \quad\Rightarrow\quad A=-2 \quad\Rightarrow\quad B=4$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x-Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung:

$$2x-18=A(x+7)+B(x-1)$$

$x=1: \quad 2-18=-16=A(1+7) \quad\Rightarrow\quad A=-2$

$x=-7: \quad 2\cdot(-7)-18=-32=B(-7-1) \;\Rightarrow\; B=4$

Integration:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x^2-35x+17}{x^2+6x-7}\,dx &= \int x-5-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+7}\,dx\\
&= \frac{x^2}{2}-5x-2\ln|x-1|+4\ln|x+7|+C
\end{aligned}
$$

c) Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell=2$ berechnet

$$\begin{aligned}
\int \frac{9}{(2x^2+3)^2}\,dx &= \int \frac{9}{3^2(2x^2/3+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(1-2)} \left((3-2\cdot 2) \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{t}{t^2+1} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \right) + C \\
&= \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{6}} + \frac{x}{2x^2+3} \right) + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 23:

Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx\ .$$

Lösung:

Raten der Nennernullstelle $x=3$ (Teiler der Konstanten 27) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad (x^4-4x^3+27):(x-3) = x^3-x^2-3x-9 \\
-\underline{(x^4-3x^3)} \\
\qquad -x^3+27 \\
\quad -\underline{(-x^3+3x^2)} \\
\qquad\quad -3x^2+27 \\
\qquad -\underline{(-3x^2+9x)} \\
\qquad\quad -9x+27 \\
\qquad -\underline{(-9x+27)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x=3$ (Teiler der Konstanten 9) und Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x - 3) = x^2 + 2x + 3 \\
-\underline{(x^3 - 3x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 3x - 9 \\
\qquad -\underline{(2x^2 - 6x)} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 9 \\
\qquad\qquad -\underline{(3x - 9)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4 - 4x^3 + 27 = (x-3)^2(x^2 + 2x + 3) = (x-3)^2((x+1)^2 + 2)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27}\,dx = \int \frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{(x-3)^2((x+1)^2+2)}\,dx$$

<u>Partialbruchzerlegungsansatz:</u>

$$\frac{8x^3 - 43x^2 + 46x - 39}{x^4 - 4x^3 + 27} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx + D}{(x+1)^2 + 2}$$

$\Rightarrow 8x^3 - 43x^2 + 46x - 39$

$= A(x-3)((x+1)^2 + 2) + B((x+1)^2 + 2) + (Cx + D)(x-3)^2$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x-Werte berechnen:

<u>Berechnung von B</u> durch Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$8 \cdot 3^3 - 43 \cdot 3^2 + 46 \cdot 3 - 39 = -72 = B(4^2 + 2) \quad \Rightarrow \quad B = -4$

<u>Berechnung von A</u> durch Ableiten

$24x^2 - 86x + 46$

$= A((x+1)^2 + 2) + B \cdot 2(x+1) + (x-3)[2A(x+1) + C(x-3) + 2(Cx + D)]$

und dann Einsetzten der Nennernullstelle $x = 3$:

$24 \cdot 3^2 - 86 \cdot 3 + 46 = 4 = A(4^2 + 2) - 4 \cdot 2(3+1) \quad \Rightarrow \quad A = 2$

<u>Berechnung von C und D</u> durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$x = 0:$

$-39 = A(-3)(1^2 + 2) + B(1^2 + 2) + (C \cdot 0 + D)(-3)^2$

$= -30 + 9D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

$x = 1:$

$8 - 43 + 46 - 39 = -28$

$= A(-2)((2)^2 + 2) + B((2)^2 + 2) + (C + D)(1-3)^2$

$= -52 + 4C \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx = \int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} + \frac{6x-1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx - 7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx + \tilde{C}$$

Zur Lösung der verbleibenden Teilintegrale:

Mit der Substitution $t=(x+1)^2+2 \to dt = 2(x+1)dx$ erhält man

$$3\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}\,dx = 3\int \frac{1}{t}\,dt = 3\ln|t| = 3\ln|(x+1)^2+2| + C_1.$$

Mit der Substitution $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}dt$ ergibt sich

$$7\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{2})^2+1}\,dx$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan t = \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C_2.$$

Damit erhält man die Stammfunktion

$$\int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + 3\ln|(x+1)^2+2| - \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx$

Die Substitution: $\quad t = e^x \;\Leftrightarrow\; x = \ln t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{t}$

führt auf den Standardfall: $\displaystyle\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}\,dx = \int \frac{P(t)}{t\cdot Q(t)}\,dt\,.$

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,dx$

Die Substitution: $\quad t = \tan\dfrac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 2\arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$

ergibt nach kurzer Rechnung $(*)$: $\quad \sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}\,, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$

und führt damit auf den Standardfall:

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,dx = \int \frac{2\cdot P\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}{(t^2+1)\cdot Q\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{1-t^2}{t^2+1}\right)}\,dt\,.$$

Zur kurzen Rechnung $(*)$:

$$\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2\tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin x$$

$$\frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \cos x$$

Aufgabe 24:

Man berechne die unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \cosh^2 t \, dt$, b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\, dx$, d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$.

Lösung:

a) Additionstheorem: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und
partielle Integration: $u = \cosh t,\ v' = \cosh t$

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 t \, dt &= \int \cosh t \cosh t \, dt = \cosh t \sinh t - \int \sinh t \sinh t \, dt + \tilde{C} \\
&= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t - 1 \, dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow \\
2\int \cosh^2 t \, dt &= t + \cosh t \sinh t + \tilde{C} \quad \Rightarrow \\
\int \cosh^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(t + \cosh t \sinh t) + C
\end{aligned}$$

b) Substitution: $x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t \, dt$ und $t = \operatorname{arsinh} x$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\, \cosh t \, dt = \int \cosh^2 t \, dt \\
&= \frac{1}{2}(t + \cosh t \sinh t) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

c) Substitution $t = e^x \quad dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+4}\, dx &= \int \frac{t^3}{t^3+4}\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+4}\, dt \\
&= \frac{1}{3}\ln(t^3+4) + C = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+4) + C,
\end{aligned}$$

d) Substitution: $\tan\dfrac{x}{2} = t$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} \frac{2dt}{t^2+1} = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\, dt \\
&= \ln|1+t| - \ln|1-t| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}$$