Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Integration

Definition

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Man nennt man F **Stammfunktion**

oder **unbestimmtes Integral** von f, wenn gilt

$$F' = f$$

und schreibt dann auch $F = \int f(x)\,dx$.

Die Funktion f wird auch als **Integrand** bezeichnet.

Ist F eine Stammfunktion, dann erhält man alle Stammfunktionen $\tilde{F}$ von f durch

$$\tilde{F} = F + C = \int f(x)\,dx + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

und bezeichnet C als **Integrationskonstante**.

Das **bestimmtes Integral** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

wird über Riemannsche Summen erklärt.

Im Falle der Existenz gibt dieses (Riemann-)Integral

bei nichtnegativem f den **Flächeninhalt**

zwischen x-Achse und Funktionsgraph von f im Intervall $[a, b]$ an.

Integraleigenschaften

Satz:

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ und integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

a) **Monotonie** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,,$ falls $f(x) \leq g(x)$,

b) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$

d) Speziell wird definiert:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x)\,dx := 0\,.$$

Tabelle einiger Stammfunktionen:

Integrand	Stammfunktion
1	$\int 1\,dx = x + C$
x	$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
x^α	$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin(x)$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\int \cos(x)x\,dx = \sin(x) + C$
$\tan(x)$	$\int \tan(x)\,dx = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$
e^x	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\sinh(x)$	$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$
$\tanh(x)$	$\int \tanh(x)\,dx = \ln(\cosh(x)) + C$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

a) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$,
dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b \ .$$

Integrationsregeln

Satz: Linearität

Für stückweise stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$
und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

a) $$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx \;=\; \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \ ,$$

b) $$\int\limits_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx \;=\; \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx \ .$$

Aufgabe 17:

Man berechne alle Stammfunktionen zu

a) $f_1(x) = 2x^5 - 5\sin(x)$, b) $f_2(x) = 4\cos(x) - 7\sinh(x)$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 + xe^x}{x}$, d) $f_4(x) = \dfrac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}$.

Lösung:

a) $$\int 2x^5 - 5\sin(x)\,dx \;=\; \frac{x^6}{3} + 5\cos(x) + C\;,$$

b) $$\int 4\cos(x) - 7\sinh(x)\,dx \;=\; 4\sin(x) - 7\cosh(x) + C\;,$$

c) $$\int \frac{2 + xe^x}{x}\,dx \;=\; \int \frac{2}{x} + e^x\,dx \;=\; 2\ln|x| + e^x + C\;,$$

d) $$\int \frac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int 3x^{9/2} - 5x^{5/2} + 4x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{6}{11}x^{11/2} - \frac{10}{7}x^{7/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + C$$

Satz: partielle Integrationsregel

Für stetig differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

a) $$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx + C\;,$$

b) $$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\;.$$

Aufgabe 18:

Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

a) $$\int (3x-1)\cosh(x)\,dx$$

partielle Integration: $u = 3x - 1\;,\; v' = \cosh(x)$

$$\begin{aligned}\int (3x-1)\cosh(x)\,dx &= (3x-1)\sinh(x) - \int 3\sinh(x)\,dx + C\\ &= (3x-1)\sinh(x) - 3\cosh(x) + C\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int x \ln(x)\, dx$

partielle Integration: $\quad u' = x\ ,\ v = \ln(x)$

$$\int x \ln(x)\, dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx \;=\; \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

c) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx$

partielle Integration: $\quad u = x^2\ ,\ v' = \cos(x)$

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x)\, dx + C$$

weitere partielle Integration: $\quad u = 2x\ ,\ v' = \sin(x)$

$$= \; x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - \int 2\cos(x)\, dx + C$$

$$= \; x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$$

d) $\int \cos(t)\sinh(t)\,dt$

partielle Integration: $u = \sinh(t)\ ,\ v' = \cos(t)$

$$\int \cos(t)\sinh(t)\,dt = \sin(t)\sinh(t) - \int \sin(t)\cosh(t)\,dt + \tilde{C}$$

weitere partielle Integration: $u = \cosh(t)\ ,\ v' = \sin(t)$

$$= \sin(t)\sinh(t) - (-\cos(t)\cosh(t) - \int -\cos(t)\sinh(t)\,dt) + \tilde{C}$$

$$= \sin(t)\sinh(t) + \cos(t)\cosh(t) - \int \cos(t)\sinh(t)\,dt + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos(t)\sinh(t)\,dt = \frac{\sin(t)\sinh(t) + \cos(t)\cosh(t)}{2} + C$$

e) $\displaystyle\int 15x\sqrt{x-1}\,dx$

partielle Integration: $\quad u = 15x\ ,\ v' = \sqrt{x-1}$

$$\int 15x\sqrt{x-1}\,dx$$

$$= \frac{2\cdot 15x}{3}(x-1)^{3/2} - \int \frac{2\cdot 15}{3}(x-1)^{3/2}\,dx + C$$

$$= 10x(x-1)^{3/2} - \int 10(x-1)^{3/2}\,dx + C$$

$$= 10x(x-1)^{3/2} - \frac{20}{5}(x-1)^{5/2} + C$$

$$= (x-1)^{3/2}(10x - 4(x-1)) + C$$

$$= 2(x-1)^{3/2}(3x+2) + C$$

f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}\,dx$$

partielle Integration:

$u = (\cos(x))^{-1}$, $v' = \sin(x)$

$\Rightarrow \qquad u' = \sin(x)(\cos(x))^{-2}\,, \qquad v = -\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\int \tan(x)\,dx &= \int \sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}\,dx \\
&= -\cos(x)(\cos(x))^{-1} \\
&\quad + \int \sin(x)(\cos(x))^{-2}\cos(x)\,dx + C \\
&= -1 + \int \tan(x)\,dx + C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Mit partieller Integration kann keine Stammfunktion gefunden werden.

Satz: Substitutionsregel

Die Funktion $g : [a, b] \to [c, d]$ sei stetig differenzierbar,

es existiere die Umkehrfunktion g^{-1} zu g und

die stetige Funktion $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ besitze die Stammfunktion F,

dann gilt mit der Substitution $x = g(t) \;\Leftrightarrow\; t = g^{-1}(x)$

a) $$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\,dx\,,$$

b) $$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,,$$

c) $$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Merkregel:

a) $$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \leftrightarrow \quad dx = g'(t)dt \quad \leftrightarrow \quad dt = \frac{dx}{g'(t)}$$

b) $$c = g(a)\,,\;\; d = g(b) \quad \Leftrightarrow \quad a = g^{-1}(c)\,,\;\; b = g^{-1}(d)$$

Aufgabe 19:

Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx$

Substitution: $s = \sin(x) \;\rightarrow\; ds = \cos(x)\,dx$

$$\int \cos(x)\sin^3(x)\,dx = \int s^3\,ds = \frac{s^4}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Substitution: $s = x^2 + 1 \rightarrow\; ds = 2x\,dx$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{s}\,ds = \frac{2s^{3/2}}{3} + C = \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

Substitution: $t = x^3 \;\rightarrow\; dt = 3x^2\,dx \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{3x^2}$

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt$

Substitution: $x = 2t+3 \;\rightarrow\; dx = 2\,dt \;\rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{2}$

$$\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(\ln(x))^4}{3x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^4\,dx$$

weitere Substitution: $u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int u^4\,du = \frac{u^5}{30} + C = \frac{(\ln x)^5}{30} + C = \frac{(\ln(2t+3))^5}{30} + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Substitution: $\quad t = e^x \;\to\; \dfrac{dt}{dx} = e^x \;\to\; dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \arctan(t) + C = \arctan\left(e^x\right) + C$$

f) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

Substitution: $\quad t = \cos(x) \;\to\; dt = -\sin(x)\,dx$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos(x)| + C$$

Aufgabe 20:

a) Man berechne den (positiven) Flächeninhalt F,
der durch die Teilmenge

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

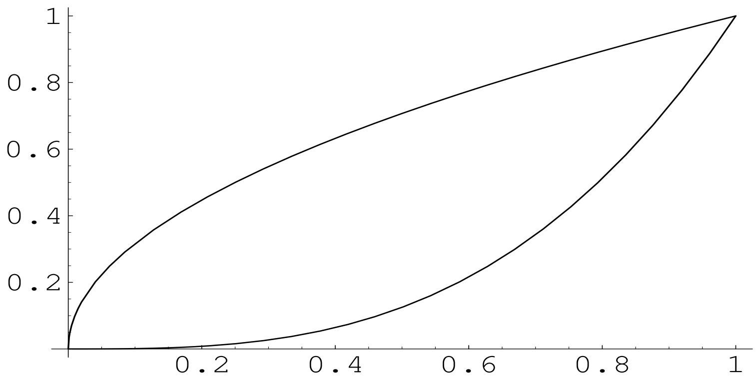

Bild 20: Menge M

Schnittpunkte von $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^3$

$$\sqrt{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^6 - x = x(x^5 - 1)\,.$$

Zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ gilt $g(x) \leq y \leq f(x)$.
Daher berechnet sich der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^3\,dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

b) Man berechne die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\, dx$

partielle Integration:

$u' = e^x\,,\ v = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u = e^x\,,\ v' = \cos(x)$

$$\int e^x \sin(x)\, dx$$

$$= \ e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$= \ e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\, dx \right) + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx$

Substitution:

$$u = \cos(x) \;\rightarrow\; du = -\sin(x)\,dx\;,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\;,\;\cos(0) = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx \;=\; -\int_1^0 u^2\,du \;=\; \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$

partielle Integration:

$$u = x\ ,\ v' = \sqrt{2x+1} \quad \Rightarrow \quad u' = 1\ ,\ v = \frac{2}{2\cdot 3}(2x+1)^{3/2}$$

$$\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$$

$$= \int_0^4 x(2x+1)^{1/2}\,dx$$

$$= x\cdot\frac{2}{2\cdot 3}(2x+1)^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{2}{2\cdot 3}\int_0^4 (2x+1)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{x}{3}(2x+1)^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{1}{15}(2x+1)^{5/2}\Big|_0^4$$

$$= (2x+1)^{3/2}\left(\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{15}\right)\Big|_0^4$$

$$= (2x+1)^{3/2}\cdot\frac{3x-1}{15}\Big|_0^4 = \frac{298}{15}$$

Substitution als Alternative:

$$u = \sqrt{2x+1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u^2-1}{2}$$

$$dx = u\,du\,, \quad \sqrt{2\cdot 0+1} = 1\,,\ \sqrt{2\cdot 4+1} = 3$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx &= \int\limits_1^3 \frac{u^2-1}{2}\cdot u\cdot u\,du \\
&= \int\limits_1^3 \frac{u^4-u^2}{2}\,du \\
&= \left.\frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6}\right|_1^3 \\
&= \left.\frac{3u^5-5u^3}{30}\right|_1^3 = \frac{298}{15}
\end{aligned}$$