Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Polynom-Interpolation

Für reelle **Stützstellen** $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ seien

zugehörige reelle Funktionswerte = **Stützwerte** $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$ bekannt.

Gesucht ist ein Polynom n-ten Grades $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$,

das die **Stützpunkte** (x_i, y_i) **interpoliert**, d.h. es gilt

$$y_i = P_n(x_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Diese $n+1$ Gleichungen können durch folgendes Gleichungssystem dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Gleichungssystems heißt **Vandermonde-Matrix** und ist regulär für paarweise verschiedene Stützstellen, also für $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen x_i gibt es genau ein Interpolationspolynom n-ten Grades P_n, für das gilt

$$y_i = P_n(x_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Das Interpolationspolynom P_n wird u.a. wegen des Rechenaufwandes **nicht** über das Gleichungssystem mit der Vandermonde-Matrix berechnet.

Lagrange-Darstellung

Lagrange-Polynome:

$$L_k(x) \quad := \quad \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)\cdot \cdots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot \cdots \cdot (x_k - x_n)}$$

Die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynom:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

lässt sich ohne Rechenaufwand aufschreiben, eignet sich aber weniger für umfangreiche numerische Auswertungen.

Aufgabe 13:

Für die Stützstellen x_i und sind nur die Funktionswerte f_i bekannt

x_i	-1	1	3	5
f_i	-15	3	-3	15 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Polynoms p_3 an, das die obigen Daten interpoliert.

b) Man zeichne p_3.

c) Man gebe das Gleichungssystem an, dass p_3 in der Darstellung $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ aufgrund der obigen Interpolationsdaten erfüllen muss.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-3)(1-5)} \\ &\quad -3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-1)(3-5)} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-1)(5-3)} \\ &= -15 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-48} + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{16} \\ &\quad -3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{-16} + 15 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{48} \end{aligned}$$

b) Für die Zeichnung und zur Überprüfung, ob c) erfüllt ist, multiplizieren wir die Lagrange-Darstellung (ausnahmsweise) aus.

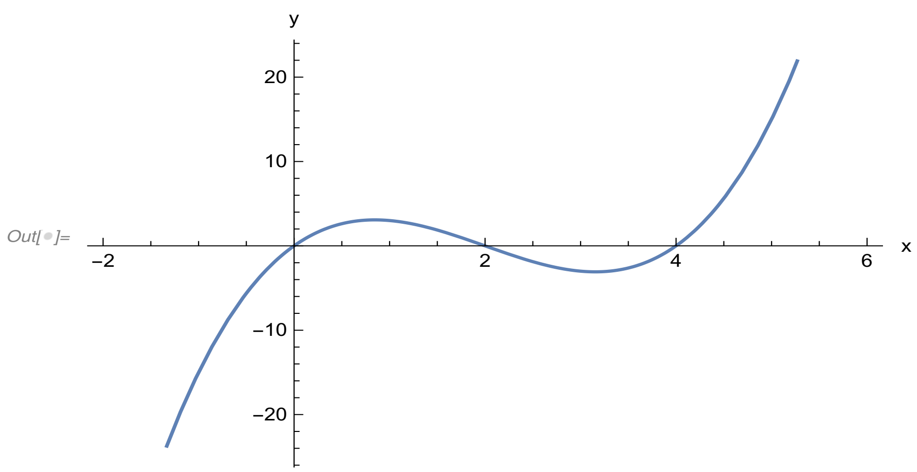

Bild 13 $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4)$

c) Die Koeffizienten von p_3 in der Darstellung $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ lauten:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 8, -6, 1) \; .$$

Diese sind eindeutig bestimmt und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} .$$

Auswertung von Interpolationspolynomen

p_{kj} bezeichne das Interpolationspolynom vom Grad j mit $0 \le j \le k \le n$, das die Stützpunkte (x_{k-j}, y_{k-j}), ... , (x_k, y_k) interpoliert.

Beispiele:

$j = 0$: $p_{00}(x_0) = y_0$, $p_{10}(x_1) = y_1$, $p_{20}(x_2) = y_2$, ... , $p_{n0}(x_n) = y_n$

$j = 1$:
$p_{11}(x_0) = y_0$, $p_{11}(x_1) = y_1$,
$p_{21}(x_1) = y_1$, $p_{21}(x_2) = y_2$,
$\vdots$
$p_{n1}(x_{n-1}) = y_{n-1}$, $p_{n1}(x_n) = y_n$

$j = 2$:
$p_{22}(x_0) = y_0$, $p_{22}(x_1) = y_1$, $p_{22}(x_2) = y_2$,
$p_{32}(x_1) = y_1$, $p_{32}(x_2) = y_2$, $p_{32}(x_3) = y_3$,
$\vdots$
$p_{n2}(x_{n-2}) = y_{n-2}$, $p_{n2}(x_{n-1}) = y_{n-1}$, $p_{n2}(x_n) = y_n$

Rekursion von Aitken:

Rekursionsstart: $p_{k,0}(x) := y_k$ für $k = 0, 1, 2, \dots n$

Berechne für $1 \le j \le k \le n$:

$$p_{k,j}(x) = p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k} \left(p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x)\right)$$

Für einen festen Wert $x \in \mathbb{R}$ kann $p_{n,n}(x)$ über folgendes Zahlenschema ausgerechnet werden:

Schema von Neville-Aitken

$k \downarrow$	x_k	$P_{k,0}(x) := y_k$	$P_{k,1}(x)$	$P_{k,2}(x)$	$P_{k,3}(x)$	$\cdots$	
0	x_0	$p_{0,0}(x) := y_0$					
1	x_1	$p_{1,0}(x) := y_1$	$p_{1,1}(x)$				
2	x_2	$p_{2,0}(x) := y_2$	$p_{2,1}(x)$	$p_{2,2}(x)$			
3	x_3	$p_{3,0}(x) := y_3$	$p_{3,1}(x)$	$p_{3,2}(x)$	$p_{3,3}(x)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	x_n	$p_{n,0}(x) := y_n$	$p_{n,1}(x)$	$p_{n,2}(x)$	$p_{n,3}(x)$	$\cdots$	$p_{n,n}(x)$.

Satz: Interpolationsfehler

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^{n+1}[a, b]$ und das Interpolationspolynom $P_n(x)$ zu den Stützpunkten $(x_k, f(x_k))$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ eine Zahl $\xi \in \,]a, b[$, so dass der Interpolationsfehler die folgende Darstellung besitzt

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \,.$$

Aufgabe 14:

a) Das (lineare) Polynom $p_{1,1}$ interpoliere die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ und $p_{2,1}$ interpoliere $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Man rechne durch einsetzen nach, dass

$$p_{2,2}(x) = p_{2,1}(x) + \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x) - p_{2,1}(x))$$

die Stützpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ interpoliert.

b) Von der Funktion $g(x) = \ln x$ seien nur die Stützstellen

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt.

(i) Für das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades berechne man $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$ mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken.

(ii) Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

(iii) Man berechne $p(1.5)$ mit einem Matlab-Programm nach dem Schema von Neville-Aitken.

Lösung:

a) $$p_{2,2}(x_0) = p_{2,1}(x_0) + \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_0) - p_{2,1}(x_0)) = p_{1,1}(x_0) = y_0$$

$$p_{2,2}(x_1) = p_{2,1}(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_1) - p_{2,1}(x_1)) = y_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}\,(y_1 - y_1) = y_1$$

$$p_{2,2}(x_2) = p_{2,1}(x_2) + \frac{x_2 - x_2}{x_0 - x_2}\,(p_{1,1}(x_2) - p_{2,1}(x_2)) = p_{2,1}(x_2) = y_2$$

b) (i)

$$\begin{aligned} P_{1,1}(1.5) &= P_{1,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_1}{x_0 - x_1}\,(P_{0,0}(1.5) - P_{1,0}(1.5)) \\ &= 0 + \frac{1.5 - 1}{0.5 - 1}\,(-0.693 - 0) \;=\; 0.693 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,1}(1.5) &= P_{2,0}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_1 - x_2}\,(P_{1,0}(1.5) - P_{2,0}(1.5)) \\ &= 0.693 + \frac{1.5 - 2}{1 - 2}\,(0 - 0.693) \;=\; 0.3465 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,2}(1.5) &= P_{2,1}(1.5) + \frac{1.5 - x_2}{x_0 - x_2}\,(P_{1,1}(1.5) - P_{2,1}(1.5)) \\ &= 0.3465 + \frac{1.5 - 2}{0.5 - 2}\,(0.693 - 0.3465) \;=\; 0.462 \end{aligned}$$

k	x_k	$P_{k,0}$	$P_{k,1}$	$P_{k,2}$
0	0.5	-0.693	$-$	$-$
1	1	0	0.693	$-$
2	2	0.693	0.3465	$0.462 = p_{2,2}(1.5)$

(ii) Mit $\tau \in]0.5, 2[$ gilt : $\quad g(x) = \ln x \Rightarrow g'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$$\begin{aligned} |\ln 1.5 - p(1.5)| &= \left| \frac{g'''(\tau)}{3!}(1.5-0.5)(1.5-1)(1.5-2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{12\tau^3} \right| \quad \begin{cases} \leq \dfrac{2^3}{12} \leq 0.6667 \\ \geq \dfrac{1}{12 \cdot 2^3} \geq 0.0104 \end{cases} \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $\quad |\ln 1.5 - p(1.5)| \doteq |0.405465 - 0.462| \doteq 0.0565\,.$

(iii) Alternativ und kürzer als die obige Rechnung:

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0.5 1 2]
>> y=[-0.693 0 0.693]
>> neville_aitken(x,y,1.5)
x =  0.5000    1.0000    2.0000
f = -0.6930         0    0.6930
f =  0.6930         0    0.6930
f =  0.6930    0.3465    0.6930
f =  0.4620    0.3465    0.6930
ans = 0.4620
```

mit dem Matlab-Programm (vgl. Skript S.66) in der Datei

`neville_aitken.m`

```
% INPUT:
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
% f=(f(1),...,f(n)) : Stützwerte zu x
% y                 : Auswertungsstelle

% OUTPUT:
% p                 : Funktionswert des Interpolationspolynoms bei y

function p=neville(x,f,y)
x
f
n = length(x);
for k=2:n
      z=y-x(k);
```

```
        for i=k-1:-1:1
        f(i) = f(i+1) + z/ (x(i)-x(k)) * ( f(i) - f(i+1) )
        end
    end
        p= f(1);
```

Newtonsche Darstellung

Nach Newton wird das Interpolationspolynom P_n zu den Stützunkten (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$ und paarweise verschiedenen Stützstellen x_i in folgender Basisdarstellung gewählt

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\,.$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ergeben sich aus dem Schema der **dividierten Differenzen**

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
x_0 & y_0 & = c_0 & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 & y_1 & \to & y_{0,1} = c_1 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 & y_2 & \to & y_{1,2} & \to & y_{0,1,2} = c_2 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 & y_3 & \to & y_{2,3} & \to & y_{1,2,3} & \to & y_{0,1,2,3} = c_3 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_n & y_n & \to & y_{n-1,n} & \to & y_{n-2,n-1,n} & \to & \cdots & \to & y_{0,1,\ldots,n} = c_n
\end{array}$$

Dabei berechnen sich die dividierten Differenzen für $0 \le j < k \le n$ durch

$$y_{j,\ldots,k} = \frac{y_{j+1,\ldots,k} - y_{j,\ldots,k-1}}{x_k - x_j}\,.$$

Damit ist eine rekursive zeilenweise Berechnung möglich:

Zeile mit x_1: $\quad y_{0,1} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Zeile mit x_2: $\quad y_{1,2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2} = \dfrac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}$

Zeile mit x_3: $\quad y_{2,3} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\,, \quad y_{1,2,3} = \dfrac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2,3} = \dfrac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0}$

usw.

Aufgabe 15:

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

x_i	0	3	6
$\sinh x_i$	0	10	201.7

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

e) Man schreibe ein Matlab-Programm zur Koeffizientenberechnung eines Newtonschen Interpolationspolynoms und teste dies am obigen Beispiel.

Lösung:

a) Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 3 & 10 & 3.33 & \\ 6 & 201.7 & 63.9 & 10.09 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad p_2(x) = 3.33x + 10.09x(x-3)$$

Alternativ lautet die Lagrange-Darstellung des Polynoms:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10 \cdot \frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$

b) $p_2(4) = 3.33 \cdot 4 + 10.09 \cdot 4 = 53.71$

Mit $\tau \in \,]0, 6[\,$ gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_2(4)| &= \left| \frac{\sinh'''(\tau)}{3!}(4-0)(4-3)(4-6) \right| \\ &= \frac{4\cosh\tau}{3} \leq \frac{4\cosh 6}{3} \doteq \frac{4 \cdot 201.7}{3} \doteq 268.93 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $\quad |\sinh(4) - p_2(4)| \doteq |27.29 - 53.71| = 26.4\,.$

c)

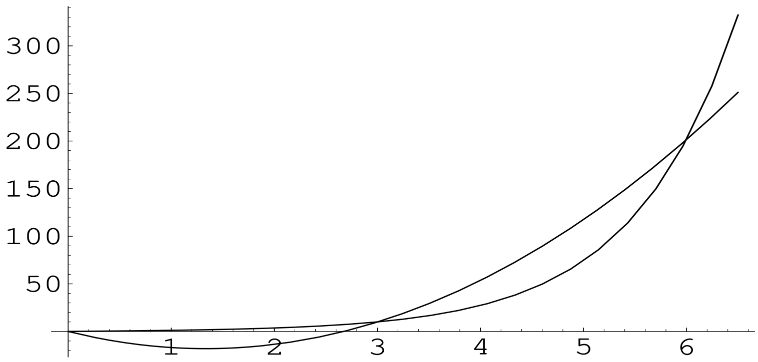

Bild 15 c) $\sinh x$ und $p_2(x)$

d) (i) An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für p_3 eine Zeile angehängt

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 3 & 10 & 3.33 & & \\ 6 & 201.7 & 63.9 & 10.09 & \\ 5 & 74.2 & 127.5 & 31.8 & 4.34 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + 4.34x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2 kann nicht durch Anhängen eines Summanden in p_3 überführt werden. Es ändern sich hier alle Terme.

(ii) $p_3(4) = p_2(4) + 4.34 \cdot 4(4-3)(4-6) = 18.99$
Mit $\tau \in \,]0,6[$ gilt:

$$\begin{aligned} |\sinh(4) - p_3(4)| &= \left|\frac{\sinh''''(\tau)}{4!}(4-0)(4-3)(4-6)(4-5)\right| \\ &= \frac{\sinh\tau}{3} \le \frac{\sinh 6}{3} \doteq \frac{201.7}{3} \doteq 67.2 \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler: $|\sinh(4) - p_3(4)| \doteq |27.29 - 18.99| = 8.3$.

(iii)

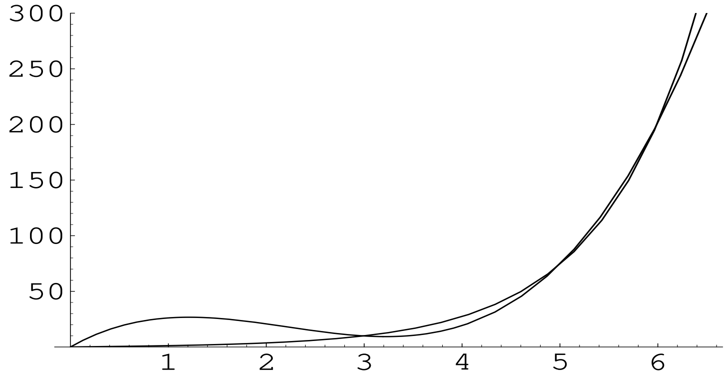

Bild 15 d) $\sinh x$ und $p_3(x)$

e) Alternativ und kürzer als die obige Rechnung:

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0 3 6]
>> y=[0 10 201.7]
>> newtonkoeff(x,y)
x =   0   3        6
y =   0   10.0000  201.7000
y =   0   10.0000   63.9000
y =   0    3.3333   63.9000
y =   0    3.3333   10.0944
ans = 0    3.3333   10.0944
```

Eingabe der Matlab-Befehle

```
>> x=[0 3 6 5]
>> y=[0 10 201.7 74.2]
>> newtonkoeff(x,y)
x =   0    3         6         5
y =   0   10.0000  201.7000   74.2000
y =   0   10.0000  201.7000  127.5000
y =   0   10.0000   63.9000  127.5000
y =   0    3.3333   63.9000  127.5000
y =   0    3.3333   63.9000   31.8000
y =   0    3.3333   10.0944   31.8000
y =   0    3.3333   10.0944    4.3411
ans = 0    3.3333   10.0944    4.3411
```

mit dem Matlab-Programm in der Datei 'newtonkoeff(x,y).m'

```
% INPUT:
% x=(x(1),...,x(n)) : Stützstellen
% y=(y(1),...,y(n)) : Stützwerte zu x

% OUTPUT:
% y=(y(1),...,y(n)) : Newtonkoeffizienten
%--------------------------------------------------------
function y = newton(x,y)
x
y
n = length(y);

for k = 2:n
  for i = n:-1:k
    y(i) = (y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-k+1))
  end
end
```

Spline-Interpolation

Definition:

Ein **natürlicher kubischer Interpolationsspline** zu den Stützpunkten (x_k, y_k) mit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ist eine Funktion $s : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

a) $s(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$,

b) $s \in C^2[x_0, x_n]$,

c) im Teilintervall $I_j := [x_{j-1}, x_j[$ besitzt s für $j = 1, ..., n$ die Darstellung

$$s_j(x) := a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3 \,,$$

d) $s''(x_0) = 0 = s''(x_n)$.

Berechnet werden müssen $4n$ Koeffizienten a_j, b_j, c_j, d_j. Diese ergeben sich aus den $4n$ Gleichungen:

- $s_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$ und $s_j(x_j) = y_j$ für $j = 1, ..., n$
- $s'_j(x_j) = s'_{j+1}(x_j)$ für $j = 1, ..., n-1$
- $s''_j(x_j) = s''_{j+1}(x_j)$ für $j = 1, ..., n-1$
- $s''_1(x_0) = 0 = s''_n(x_n)$.

Berechnung der Koeffizienten a_j, b_j, c_j, d_j nach der **Momentenmethode**:

Für $j = 0, 1, \ldots, n$ werden mit $M_j := s''(x_j)$ die **Momente** bezeichnet.

Beim natürlichen Spline gilt $M_0 = 0$ und $M_n = 0$.

Die übrigen Momente ergeben sich aus dem tridiagonalen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $\lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$, $\mu_j = \dfrac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$ und

$$D_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

Mit den Momenten berechnen sich die Koeffizienten folgendermaßen:

$$a_j = f_{j-1}, \quad b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{(2M_{j-1} + M_j)h_j}{6}, \quad c_j = \frac{M_{j-1}}{2}, \quad d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

Aufgabe 16:

a) Man berechne den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu folgenden Daten

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
f_k	4	0	1	4 .

Diese Daten wurden durch die Funktion $f(x) = (x-2)^2$ erzeugt.

b) Man zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$.

c) Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

d) Man zeichne $s(x)$ unter Verwendung der Matlab-Routinen 'spline', 'linspace', 'ppval' und 'plot'.

Lösung:

a) Der kubische Interpolationsspline $s(x)$ besitzt im Intervall $I_j = [x_{j-1}, -x_j]$ für $j = 1, 2, 3$ die Darstellung

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3 \, .$$

Die Koeffizienten a_j, b_j, c_j und d_j ergeben sich nach der Momentenmethode folgendermaßen:

Für $j = 0, 1, 2, 3$ werden mit $M_j := s''(x_j)$ die Momente bezeichnet. Beim natürlichen Spline sind $M_0 = 0$ und $M_3 = 0$. Die übrigen Momente ergeben sich aus folgendem 'tridiagonalen' Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2, \; h_2 = 1, \; h_3 = 1$

$\lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dfrac{1}{3}\,, \qquad \mu_j = \dfrac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \dfrac{1}{2}$

und

$D_j = \dfrac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\dfrac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$

$\Rightarrow \quad D_1 = \dfrac{6}{3} \left(\dfrac{1-0}{1} - \dfrac{0-4}{2} \right) = 6, \quad D_2 = \dfrac{6}{2} \left(\dfrac{4-1}{1} - \dfrac{1-0}{1} \right) = 6$

Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/3 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad M_1 = \dfrac{60}{23}, \; M_2 = \dfrac{54}{23}$

Mit den Momenten berechnen sich die Koeffizienten folgendermaßen:

$$a_j = f_{j-1}, \quad b_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{(2M_{j-1} + M_j)h_j}{6}, \quad c_j = \frac{M_{j-1}}{2}, \quad d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

Man erhält für $s(x)$ in den Intervallen I_1, I_2 und I_3 damit die Darstellungen

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= 4 - \frac{66}{23}x + \frac{5}{23}x^3 \\
s_2(x) &= -\frac{6}{23}(x-2) + \frac{30}{23}(x-2)^2 - \frac{1}{23}(x-2)^3 \\
s_3(x) &= 1 + \frac{51}{23}(x-3) + \frac{27}{23}(x-3)^2 - \frac{9}{23}(x-3)^3 .
\end{aligned}$$

b)

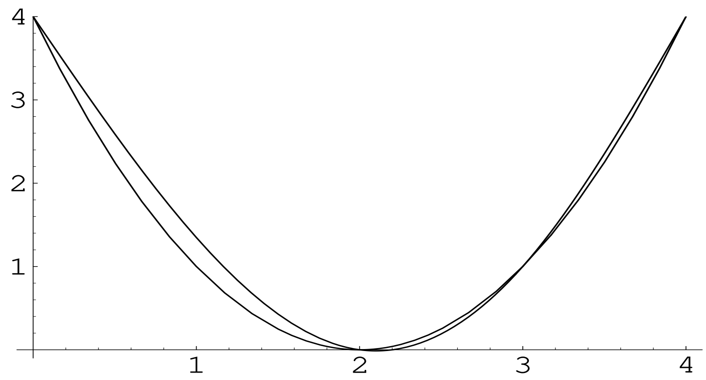

Bild 16 a) $f(x) = (x-2)^2$ und $s(x)$

c) Der natürliche Spline s kann nicht mit f übereinstimmen, denn per Konstruktion gelten $M_0 = s''(0) = 0$ und $M_3 = s''(4) = 0$, aber $f''(0) = 2 = f''(4)$.

d)
```
>> clear
>> x=[0 2 3 4];
>> f=[4 0 1 4];
>> s=spline(x,f);
>> t=linspace(0,4,1000);
>> y=ppval(s,t);
>> plot(t,y)
```

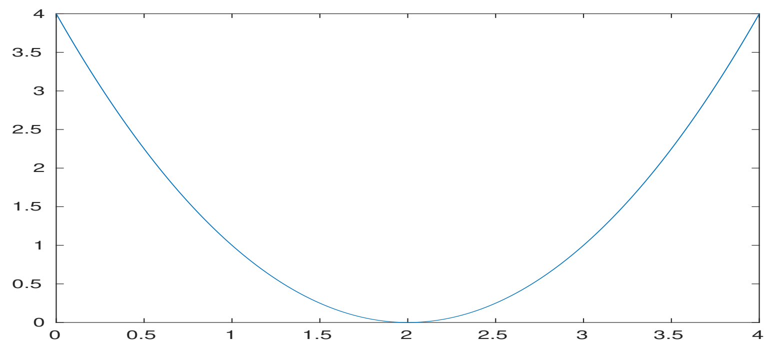

Bild 16 b) $s(x)$