Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Satz: Differentiation einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen ergeben sich durch gliedweises differenzieren:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}\,, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}\,, \ldots$$

Die abgeleiteten Reihen besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Aufgabe 9:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{6}{5-4z}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Lösung:

a) $$\frac{6}{5-4z} = \frac{6}{5-4z_0+4z_0-4z} = \frac{6}{5-4z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)}$$
$$= \frac{6}{5-4z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6\cdot 4^k}{(5-4z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{6\cdot 4^k(5-4z_0)^{k+2}}{6\cdot 4^{k+1}(5-4z_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{5-4z_0}{4}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad |z-z_0| < \left|\frac{5-4z_0}{4}\right| = \left|\frac{5}{4}-z_0\right| = r$$

Man beachte: $x = \frac{5}{4}$ ist Polstelle von f.

Der Konvergenzradius für $z_0 = \frac{3i}{4}$: $\quad r = \left|\frac{5}{4}-\frac{3i}{4}\right| = \left|\frac{5-3i}{4}\right| = \frac{\sqrt{34}}{4}$.

b) Aus $f'(x) = \left(\frac{6}{5-4x}\right)' = \frac{24}{(5-4x)^2}$ folgt $g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2} = \frac{f'(x)}{24}$.

Damit ergibt sich die Potenzreihe von g durch differenzieren der Potenzreihe von f:

$$g(x) = \frac{1}{24}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6\cdot 4^k}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 4^{k-1}}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^{k-1}\,.$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein.

Probe:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k\cdot 4^{k-1}(5-4x_0)^{k+2}}{(5-4x_0)^{k+1}(k+1)4^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(5-4x_0)}{(k+1)4}\right| = \left|\frac{5-4x_0}{4}\right| = \left|x_0-\frac{5}{4}\right|\,.$$

Cauchy-Produkt

Für zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$ gilt

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} d_j a_{k-j} \right) z^k$$

für $|z| < \min(r_1, r_2)$.

Satz:

Die Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ besitze den Konvergenzradius $R > 0$ und es gelte $g(0) = a_0 \neq 0$, dann besitzt die Funktion $f = 1/g$ eine Potenzreihe

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

mit einem Konvergenzradius $r > 0$. Die Berechnung der Koeffizienten d_k erfolgt über das Cauchy-Produkt

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \right) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} d_j a_{k-j} \right) z^k$$

mit Koeffizientenvergleich und führt auf die Rekursionsformel:

$$d_0 = \frac{1}{a_0}\,, \quad d_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5 - 4x}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{6}{5-4x} &= f(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots \\ \Rightarrow\ 6 &= (5-4x)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots) \\ &= 5d_0 + (5d_1 - 4d_0)x + (5d_2 - 4d_1)x^2 + (5d_3 - 4d_2)x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow\ 6 = 5d_0\ ,\ 0 = 5d_k - 4d_{k-1}\ \Rightarrow\ d_0 = \frac{6}{5}\ ,$

$$d_k = \frac{4}{5}d_{k-1} = \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k$$

Konvergenzradius: $\quad r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k}{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}}\right| = \frac{5}{4}$

Alternativrechnung mit den Formelauswertungen aus dem Skript (Methode identisch):

$$f(x) = \frac{6}{5-4x} = \frac{1}{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}x} =: \frac{1}{g(x)}$$

Da $g(0) \neq 0$, besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\ , \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{5}{6} - \frac{4}{6}x \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{5}{6}\ ,\ a_1 = -\frac{4}{6}\ ,\ a_k = 0\ ,\ k \geq 2\ .$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{6}{5}\ ,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0}d_{k-1} = \frac{4}{5}d_{k-1} \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Aufgabe 11:

Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Lösung:

Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden. Setzt man die Potenzreihe und ihre erste Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1}(k+1) - a_k) x^k = 0 \, .$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt sich folgende Rekursionsformel zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+1}(k+1) - a_k = 0 \;\Rightarrow\; a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \cdots = \frac{a_0}{(k+1)!} \, .$$

Der Anfangswert ergibt $y(0) = a_0 = 3 \Rightarrow a_k = \dfrac{3}{k!}$ und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} x^k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 3e^x$$

als Lösung der Differentialgleichung. Der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{3(k+1)!}{3 \cdot k!} \right| = \lim_{k \to \infty} (k+1) = \infty \, .$$

Elementare Funktionen

Die **Binomialreihe** für $a \in \mathbb{R}$ und $x \in]-1,1[$ lautet:

$$(1+x)^a = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{a}{m} x^k$$

mit den **Binomialkoeffizienten**: $$\binom{a}{m} := \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(a-j)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Satz: Integration einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ besitzt im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ eine **Stammfunktion** F, d.h. es gilt $F' = f$. Durch gliedweises Integrieren erhält man:

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Die Stammfunktion F besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Abelscher Grenzwertsatz:

Besitzt die reelle Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

den endlichen Konvergenzradius $r > 0$ und konvergiert sie im rechten Randpunkt $x_0 + r$, so ist die Summenfunktion $g(x)$ in $x_0 + r$ (linksseitig) stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0 + r} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Entsprechendes gilt für den linken Randpunkt $x_0 - r$.

Aufgabe 12:

a) (i) Man berechne die Ableitung von $f(x) = \ln(2+x)$ und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

(ii) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter (i) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

b) Man berechne die Potenzreihe für die durch $g(x) = \sqrt[3]{8+3x}$ gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Lösung:

a) (i) Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man für $|x/2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-(x/2))} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \, x^n \, .$$

die Potenzreihe von f' mit dem Konvergenzradius $r = 2$.
Gliedweise Integration der Reihe liefert wegen $f(0) = \ln(2)$ die Potenzreihe von f

$$f(x) = \ln(2+x) \quad = \quad C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} \, x^{n+1} \quad = \quad \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} \, x^{n+1} \, .$$

(ii) Der Randpunkt $x = -2$ führt auf die harmonische Reihe

$$\ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

und man erhält keine Konvergenz.
Für den Randpunkt $x = 2$ erhält man mit der alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Konvergenz. Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten, so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren. Man erhält also im Randpunkt $x = 2$ den Wert

$$\ln(4) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \left(\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \right) \, .$$

b) Die Potenzreihe von $g(x) = \sqrt[3]{8+3x} = 2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{1/3}$ wird über die Binomialreihe für $-1 < \frac{3x}{8} < 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3} \Leftrightarrow |x| < \frac{8}{3}$ berechnet:

$$2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{3x}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix}\frac{2\cdot 3^n}{8^n}\,x^n\,.$$

Der Konvergenzradius $r = \frac{8}{3}$ bestätigt sich auch rechnerisch über die Koeffizienten $a_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix}\frac{2\cdot 3^n}{8^n}$ mit $\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-k\right)$:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix}\frac{2\cdot 3^n}{8^n}}{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n+1 \end{pmatrix}\frac{2\cdot 3^{n+1}}{8^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\cdot\left|\frac{\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-k\right)}{\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}-k\right)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8(n+1)}{3}\cdot\left|\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-k\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}-k\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\cdot\frac{n+1}{n-1/3} = \frac{8}{3}\,.$$