Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Fixpunktiteration

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) $x^* \in [a, b]$ heißt **Fixpunkt** von f, falls $x^* = f(x^*)$ gilt.

b) f heißt **Lipschitz-stetig** auf $[a, b]$, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \, .$$

Gilt $L < 1$ auf $[a, b]$, so heißt f **kontrahierend** auf $[a, b]$ und L **Kontraktionskonstante**.

Banachscher Fixpunktsatz:

Erfüllt eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetige Funktion Φ folgende Bedingungen:

a) $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$,

b) Φ ist kontrahierend auf $[a, b]$,

dann gilt

a) Φ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in [a, b]$,

b) für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

gegen den Fixpunkt x^* und es gelten die **Fehlerabschätzungen**

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1 - L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0| \, .$$

Bemerkungen:

a) Da die Fehlerabschätzung über die rechte Ungleichung direkt nach der Berechnung von x_1 für alle $n \geq 1$ möglich ist bezeichnet man sie auch als **a priori-Abschätzung**. Die Fehlerabschätzung über die linke Ungleichung ist erst nach der Berechnung von x_n möglich und wird entsprechend als **a posteriori-Abschätzung** bezeichnet.

b) Gilt $\Phi \in C^1[a,b]$, so kann die Lipschitz-Konstante L gewählt werden als

$$L = \sup_{x \in [a,b]} |\Phi'(x)| \, .$$

c) Gilt für die C^1-Funktion Φ im Fixpunkt $|\Phi'(x^*)| < 1$, so heißt x^* **anziehender Fixpunkt** und es gibt ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, also zu einer gegen x^* konvergenten Fixpunktiteration führt.

d) Gilt für die C^1-Funktion Φ im Fixpunkt $|\Phi'(x^*)| > 1$, so heißt x^* **abstoßender Fixpunkt** und es gibt kein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$, dass die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Fixpunktiteration (mit $x_0 \neq x^*$) wird in diesem Fall nicht gegen x^* konvergieren.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \, , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Lösung:

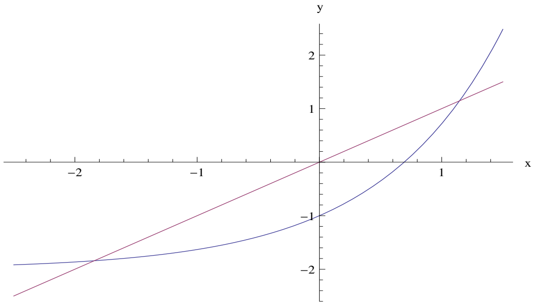
a) Das Fixpunktproblem ist äquivalent zum Nullstellenproblem für $g(x)$:

$$x = e^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := e^x - 2 - x = 0 \,.$$

Da $g'(x) = e^x - 1$ genau eine Nullstelle besitzt, hat g nach dem Satz von Rolle höchstens zwei Nullstellen.

Es gilt $g(-2) = 0.135...,\ g(-1) = -0.632...,\ g(1) = -0.282...,\ g(2) = 3.39...$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt g also eine Nullstelle im Intervall $[-2, -1]$ und eine weitere im Intervall $[1, 2]$.



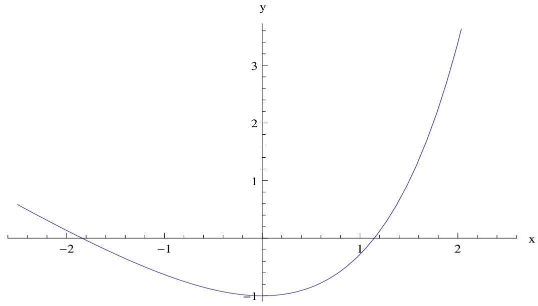


Bild 5 a i) Winkelhalbierende und $\Phi(x) = e^x - 2$ **Bild 5 a ii)** $g(x) = e^x - 2 - x$

b) Für das Intervall $D = [-2, -1]$ werden die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes überprüft:

(i) D ist abgeschlossen.

(ii) Da $\Phi'(x) = e^x > 0$ gilt, wächst Φ monoton. Es gilt also

$$\Phi(D) = [\Phi(-2), \Phi(-1)] = [-1.865, -1.632] \subset [-2, -1] = D.$$

(iii) Φ ist eine C^1-Funktion und damit Lipschitz-stetig. Eine Lipschitz-Konstante in D erhält man durch

$$L = \sup_{-2 \le x \le -1} |\Phi'(x)| = \sup_{-2 \le x \le -1} e^x = \frac{1}{e} = 0.367880,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf D.

Damit sind die Vorraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Es gibt also genau einen Fixpunkt $x^* \in D$, das Fixpunktverfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen x^* und es gelten die a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzung.

Die Anzahl der Iterationsschritte, die zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes mit $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens erforderlich sein wird, kann aus der a priori-Fehlerabschätzung ermittelt werden. Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man $n = 10$ Iterationsschritte:

$$|x_n - x^*| < \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0| < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{1-L}{10000|x_1 - x_0|}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{1-0.367880}{10000|-1.632+1|}\right)}{\ln 0.367880} = 9.21...$$

c) Ein Matlab-Programm zur Fixpunktberechnung mit a posteriori-Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium:

```
>> funkt=inline('exp(x)-2','x')
>> fixpunkt(-1,0.0001,funkt,0.36787944117144233)
k    x_k
0    -1
1    -1.632120558828558
2    -1.804485465847412
3    -1.835440893922046
4    -1.840456855343537
5    -1.841255113911434
ans= -1.841381782812870
```

```
function x = fixpunkt(x0,eps,funkt,L)
%--------------------------------------------------------------
% Berechnet einen Fixpunkt mit Hilfe des Fixpunktverfahrens
%
% Input:    x0    Startwert
%           eps   Genauigkeit
%           funkt Verfahrensfunktion
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('exp(x)-2','x')
%           L     Lipschitzkonstante,
%                 falls unbekannt L>1 setzen
%
% interne
% Variable: n     zählt die Iterationsschritte
%           x     nächste Iterierte
%
% Output:   x     Fixpunktnäherung
%
% Kai Rothe, März-2015.
%--------------------------------------------------------------
  n=0;
  [n x0]
  x = funkt(x0);
  if(0<L & L<1)
    while(L*abs(x-x0)/(1-L)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1;
      [n x0]
      x  =  funkt(x0);
    end
  else
    while(abs(x-x0)>eps)
```

```
      x0 = x;
      n=n+1
      x  =  funkt(x0)
    end
  end
```

Bemerkung:

Der Fixpunkt im Intervall $[1,2]$ kann mit der Verfahrensfunktion $\Phi(x) = e^x - 2$ nicht berechnet werden, denn es gilt

$$\inf_{1\leq x\leq 2} |\Phi'(x)| = \inf_{1\leq x\leq 2} e^x = e = 2.71828... > 1,$$

d.h. Φ kontrahiert nicht im Intervall $[1,2]$.

Schreibt man obiges Fixpunktproblem um in $x = \ln(x+2) =: \Theta(x)$, so sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für Θ in $[1,2]$ mit $L = \dfrac{1}{3}$ erfüllt und der Fixpunkt berechnet sich zu $x^{**} = 1.1461$.

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definition:

a) Unter einer **Funktionenfolge** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Abbildung der Form

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & V \\ n & \mapsto & f_n \end{array} .$$

V sei der Vektorraum, der die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ enthält, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** auf I gegen eine Funktion f, falls für jedes fest gewählte $x \in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** auf I gegen eine Funktion f, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Satz:

Sind alle Funktionen f_n auf dem Intervall I stetig und konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Definition:

a) Die aus einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Folge von **Partialsummen** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

heißt **Funktionenreihe** und wird mit $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ bezeichnet.

b) Die Begriffe **punktweise** und **gleichmäßige Konvergenz** übertragen sich auf die Funktionenreihe, wenn sie für die Funktionenfolge der Partialsummmen $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gelten.

Satz:

a) **Stetigkeit der Grenzfunktion**

Sind alle Funktionen $f_k(x)$ stetig und konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegen die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ ,$$

dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.

b) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

Gegeben seien die Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Gibt es für alle $k \geq 0$ Konstanten $M_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{für alle } x \in I: \quad |f_k(x)| \leq M_k$$

und konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig und absolut auf I.

Aufgabe 6:
Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [-2,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{x^2}}$, b) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$.

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Lösung:

a) Die Folge f_n konvergiert punktweise gegen f:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+ne^{x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n+e^{x^2}} = 0 =: f(x) \,.$$

f_n konvergiert auch gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 \ \le \sup_{x\in[-2,2]} |f_n(x)-f(x)| \ &= \sup_{x\in[-2,2]} \left| \frac{1/n}{1/n+e^{x^2}} - 0 \right| = \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{1/n+e^{x^2}} \right| \\ &\le \sup_{x\in[-2,2]} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{e^{x^2}} \right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

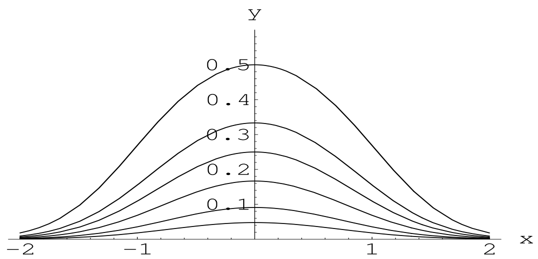


Bild 6 a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{x^2}}$ für $n = 1,2,3,5,10,20$

b) Es gilt $h_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1/n+x^2} = 1 \,.$$

Also konvergiert die Folge h_n punktweise gegen h:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ 1 & : \ x \neq 0 \end{cases} \,.$$

h_n konvergiert nicht gleichmäßig, da h unstetig ist.

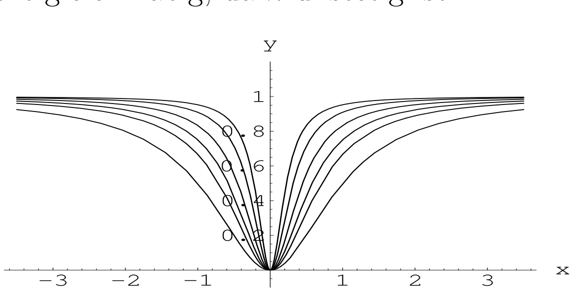


Bild 6 b) $h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ für $n = 1,2,3,5,10,20$

Aufgabe 7:

Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^3-1)(2-x^3)^k\,, \qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\,.$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

Lösung:

a) Für $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n}(x^3-1)(2-x^3)^k$ ergibt die geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^3-1)\sum_{k=0}^{n}\left(2-x^3\right)^k = (x^3-1)\frac{1-\left(2-x^3\right)^{n+1}}{1-(2-x^3)} \\ &= 1-\left(2-x^3\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Für $|2-x^3|<1 \Leftrightarrow 1<x^3<3$ erhält man Konvergenz mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Außerdem gilt $f_n(1)=0$. Für alle anderen x liegt Divergenz vor. Die Funktionenfolge f_n konvergiert also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = 1 \\ 1 & : \quad 1 < x < \sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

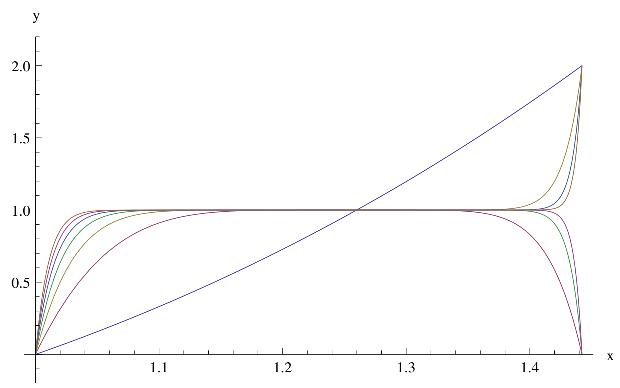


Bild 7 a) $f_n(x) = 1-\left(2-x^3\right)^{n+1}$ für $n = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$

Die Grenzfunktion f ist nicht stetig, die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein.

b)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$$

konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) und absolut nach dem Majorantenkriterium auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\left|\frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}\right| \le \frac{1}{(k+1)^3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty\,.$$

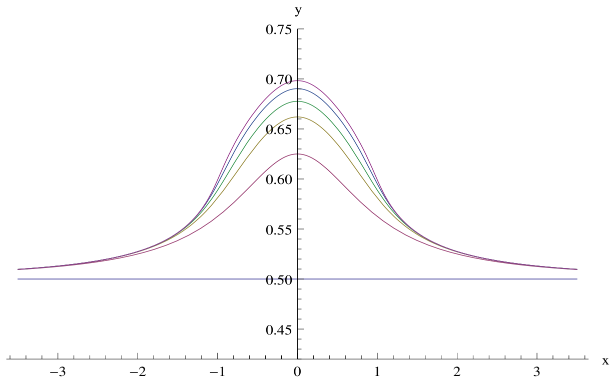


Bild 7 b) $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k}+1)}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 5, 10$

Potenzreihen

Definition:

a) Eine Funktionenreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt (komplexe) **Potenzreihe** zum **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$.

b) Gerechtfertigt durch den nächsten Satz wird mit

$$r := \sup\{\ |z - z_0| \ \text{ für das } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ \text{ konvergiert }\}$$

der **Konvergenzradius** der Potenzreihe bezeichnet. Es wird dabei $0 \leq r \leq \infty$ zugelassen.

Satz: Konvergenz von Potenzreihen

Für die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit dem Konvergenzradius r gilt:

a) Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe genau für $z = z_0$.

b) Gilt $0 < \rho < r$, dann konvergiert die Potenzreihe innerhalb der Kreisscheibe $|z - z_0| < r$ absolut und auf jeder Kreisscheibe $|z - z_0| \leq \rho$ absolut und gleichmäßig.

c) $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ (**Formel von Cauchy-Hadamard**)

d) Für $|z - z_0| > r$ divergiert die Potenzreihe.

Satz: Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius

Für die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ kann im Falle der Existenz der Grenzwerte der Konvergenzradius folgendermaßen berechnet werden:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{oder} \qquad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

$r = 0$ und $r = \infty$ sind dabei zugelassen.

Bemerkung:

Im Falle einer reellen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ wird $]x_0 - r, x_0 + r[$ als **Konvergenzintervall** bezeichnet.

Aufgabe 8:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\, x^n \quad , \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x \right)^{2n} \, .$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Lösung:

a) (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}}_{=a_n}\, x^n$, Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4} \cdot \frac{(n+1)^2+4}{\sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} \cdot \frac{1+2/n+5/n^2}{1+4/n^2} = 1$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \, ,$$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

Koeffizienten: $a_k = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{25}\right)^k & , \quad k = 2n \\ 0 & , \quad k = 2n+1 \end{cases}$

Konvergenzradius:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{4}{25}\right)^{2n}}} = \frac{25}{4}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$

Entwicklungspunkt: $\quad x_0 = -\dfrac{1}{2}$

Konvergenzradius: $\quad r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{n+2}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$

Konvergenz in den Randpunkten:

$x_1 = 0$, Divergenz nach dem Minorantenkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \,.$$

$x_2 = -1$, Konvergenz nach dem Leibnizkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \,.$$

Man erhält also das Konvergenzintervall $\quad [-1, 0[$.

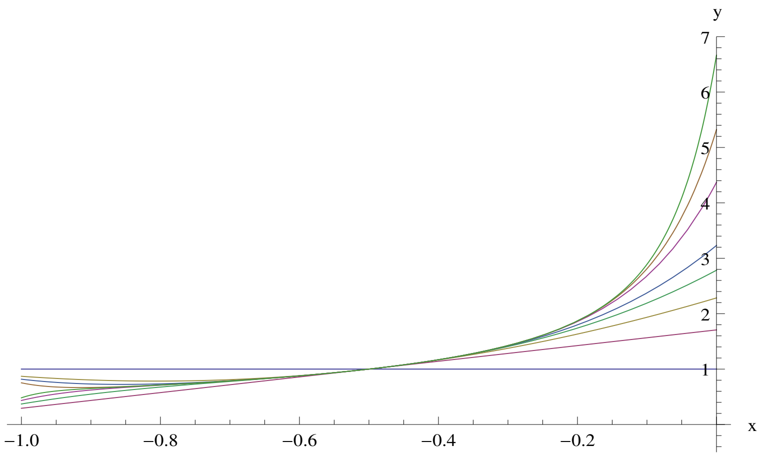


Bild 8: $\quad S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ für $N = 0, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 15$