# Analysis II

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Ist der Mittelwertsatz $g'(x_0) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ mit $x_0 \in ]a, b[$ für $a = -1$ und $b = 1$ auf $f$ anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle $x_0$.

**Lösung:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \geq 0, \\ -2x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \; .$$

Da $f$ stetig differenzierbar ist, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt und es lässt sich eine Zwischenstelle $x_0 \in ]-1, 1[$ berechnen:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (1 - (-1)^2)}{2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -2x_0 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = -\frac{1}{4}.$$

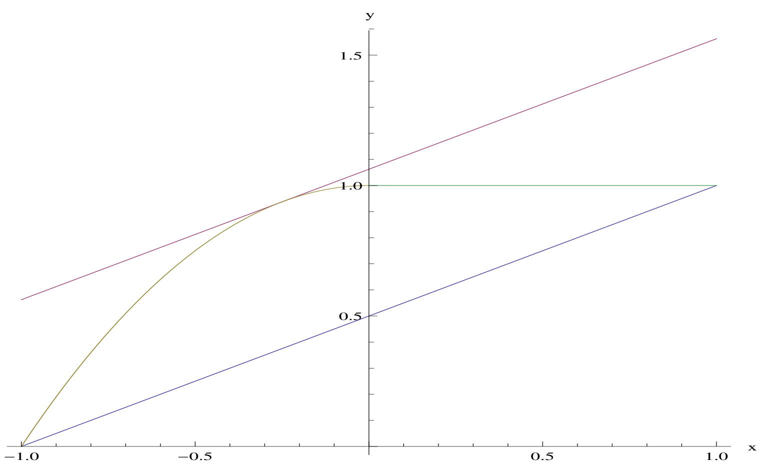


**Bild 1** $f(x)$ mit Tangente in $x_0 = -\dfrac{1}{4}$ und Sekante für $a = -1$ und $b = 1$

**Aufgabe 2:**

Für die folgenden Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

a) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_1(x) = \cosh(x) - 1$,

b) $[a, b] = [-3, -1]$ und $f_2(x) = (x + 2)^2 - 4$.

**Lösung:**

Aus dem Mittelwertsatz erhält man mit $x_0 \in ]a, b[$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(x_0)| \cdot |b - a| \le \underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f'(x)|}_{=:L} \cdot |b - a| \,.$$

a)

$$L = \max_{x\in[0,1]} |f_1'(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\sinh x| = \sinh 1 = 1.1752....$$

$f_1$ wächst in $[0, 1]$ streng monoton, denn es gilt $f_1'(x) = \sinh(x) > 0$ für $x \in ]0, 1]$. Damit nimmt $f_1$ seinen Maximalwert für $x = 1$ und seinen Minimalwert in $x = 0$ an. Man erhält also

$$f_1([0, 1]) = [f_1(0), f_1(1)] = [0, \cosh(1) - 1] = [0, 0.543...] \subset [0, 1] \,.$$

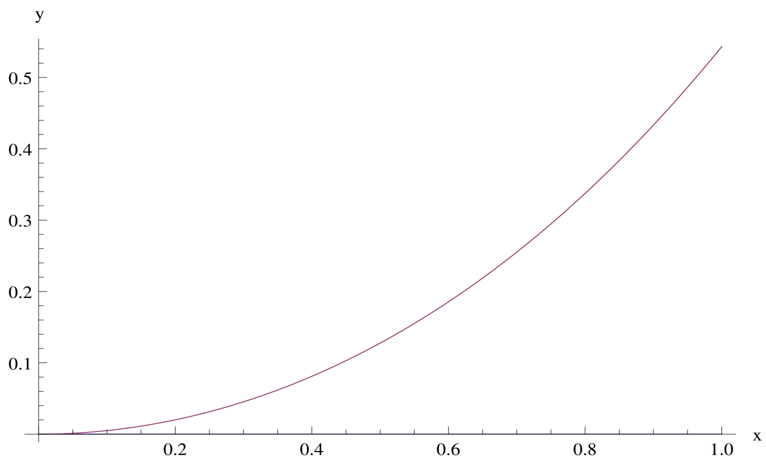


**Bild 2 a)** $f_1(x) = \cosh(x) - 1$

b)

$$L = \max_{x\in[-3,-1]} |f_2'(x)| = \max_{x\in[-3,-1]} |2(x+2)| = 2.$$

Aus der Scheitelpunktform $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$ erhält man Minimalwert $f_2(-2) = -4$ und in $[-3,-1]$ den Maximalwert für $f_2(-3) = -3 = f_2(-1)$. Damit ergibt sich

$$f_2([-3,-1]) = [f_2(-2), f_2(-1)] = [-4,-3] \not\subset [-3,-1]\,.$$

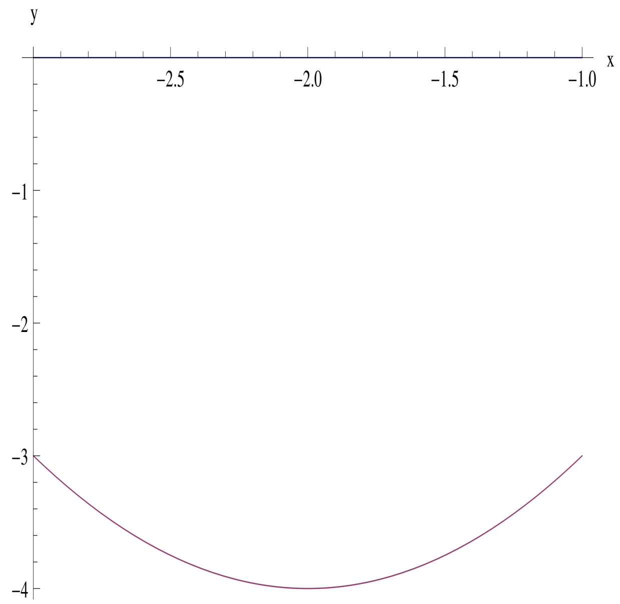


**Bild 2 b)** $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion $f$.

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}} \,.$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von $f$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = \dfrac{1}{2}$ und $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

**Lösung:**

a)

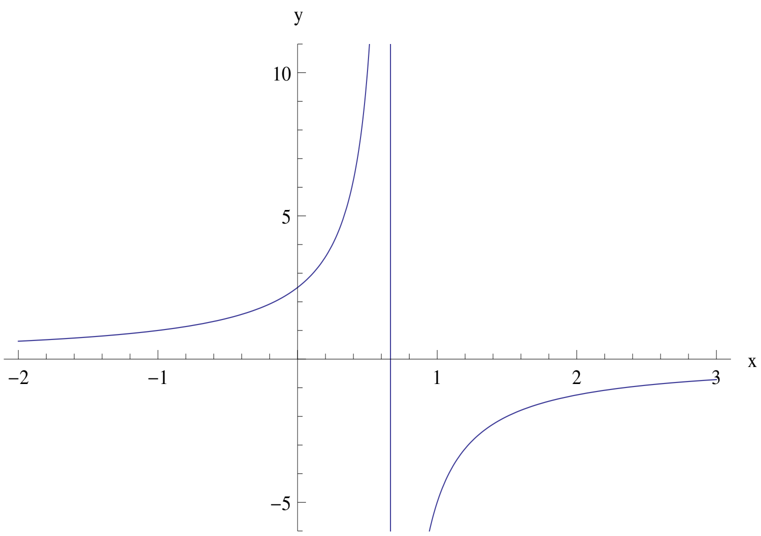


**Bild 3** $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$

b) $k = 0$: $\dfrac{5 \cdot 3^0 \cdot 0!}{(2-3x)^{0+1}} = \dfrac{5}{2-3x} = f(x) = f^{(0)}(x)$

$k \to k+1$ :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}}\right)' \\ &= \frac{5 \cdot 3^k \cdot k! \cdot (-3) \cdot (-(k+1))}{(2-3x)^{k+2}} = \frac{5 \cdot 3^{k+1} \cdot (k+1)!}{(2-3x)^{k+2}} \end{aligned}$$

c) $x_0 = \dfrac{1}{3}$ ergibt $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3/3)^{k+1}} = 5 \cdot 3^k \cdot k!$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1/3)}{k!}\,\left(x-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(x-\frac{1}{3}\right)^k$$

d) Konvergenz für $x_1 = \dfrac{1}{2}$ über die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^k = 5\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 5 \cdot \frac{1}{1-1/2} = 10 = f\left(\frac{1}{2}\right) .$$

In $x_2 = \dfrac{2}{3}$ liegt Divergenz vor, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5$$

erfüllt die notwendige Konvergenzbedingung nicht: $\lim\limits_{k\to\infty} 5 \neq 0$.

*Bemerkung*: $x_2 = \dfrac{2}{3}$ ist Polstelle 1.Ordnung von $f$.

**Aufgabe 4:**

Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius $R$ wird ein Sektor mit dem Winkel $\alpha$ herausgeschnitten. Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel $\alpha$ besitzt dieser Kegel maximales Volumen? Man berechne dieses Maximalvolumen.

**Lösung:**

Für den Umfang des Kegelbodenkreises mit Radius $r$ gilt:

$$2\pi r = \alpha R \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi} \; .$$

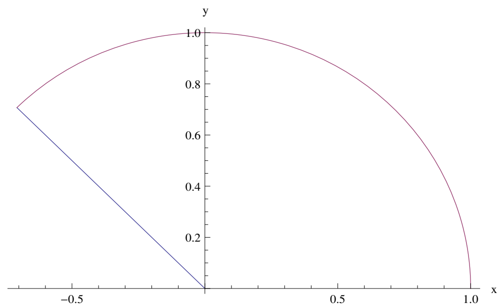


**Bild 4 a)** Kreissektor mit $R = 1$

Da die Länge der Kegelmantellinie mit $R$ übereinstimmt, gilt nach dem Satz des Pythagoras $h^2 + r^2 = R^2$. Damit erhält man für die Kegelhöhe $h$:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2(\alpha)} = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{(2\pi)^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} \; .$$

Das Kegelvolumen ist also gegeben durch

$$V(\alpha) = \frac{\pi r^2(\alpha) h(\alpha)}{3} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \alpha^2 \sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \sqrt{(2\pi)^2 \alpha^4 - \alpha^6} \; \geq 0 \; .$$

Per Konstruktion gilt $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. In den Randpunkten des Definitionsbereichs $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_2 = 2\pi$ liegen offenbar Minima vor:

$$V(0) = 0 = V\,(2\pi) \; .$$

Die Extremalkandidaten im Inneren ergeben sich aus:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{4(2\pi)^2\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4 - \alpha^6}} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{\alpha(2(2\pi)^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}} \begin{cases} > 0 & , \quad 0 < \alpha < 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \\ = 0 & , \quad \alpha_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \\ < 0 & , \quad 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} < \alpha < 2\pi \; . \end{cases}$$

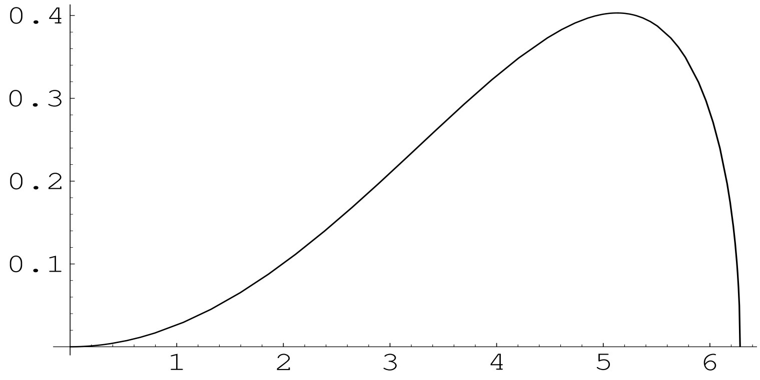


**Bild 4 b)** $V(\alpha)$ mit $R = 1$

Daher liefert $\alpha_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 5.130199321..$ das maximale Volumen mit

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{2(2\pi)^2}{3}\sqrt{(2\pi)^2 - \frac{2(2\pi)^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \approx 0.403066525R^3.$$