Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen

- Die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

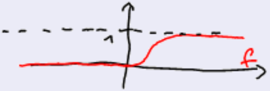
so nennt man die Funktion f reell-analytisch.

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Beispiele

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{h \to \infty} e^{-h} = 0 = \lim_{x \nearrow 0} f(x)$$

$\Rightarrow f$ stetig in 0

Diff'barkeit in 0:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x e^{-x} = 0$$

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \Rightarrow f \text{ diff'bar in } 0 \text{ mit } f'(0) = 0$$

$\Rightarrow f$ diff'bar mit $\quad f'(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0 \end{cases}$

Beispiele

$$f'(x) = \begin{cases} 0 : x \le 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \end{cases}$$

Diff'barkeit in 0 : $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim\limits_{h \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^3}$

$$= \lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x} = 0 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}$$

$\Rightarrow$ f' diff'bar mit $f''(x) = \begin{cases} 0 : x \le 0 \\ \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \end{cases}$

Zwischenrechnung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{-2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

... weiter .... f unendl. oft diff'bar mit $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Taylor-Reihenentwicklung

Beispiele

Taylorreihe: $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$

$\rightsquigarrow$ konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

Es gilt jedoch $T(1) = 0 \neq \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-\frac{1}{1}} = f(1)$

Bspe reell-analytischer Fktn:

$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Satz

Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

oder $r = \infty$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.
Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Satz (Die Formel von Cauchy-Hadamard)

Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wobei hier $\frac{1}{0} := \infty$

$\frac{1}{\infty} := 0$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Beispiel

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^k$

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}$ konv. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$

div. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 2$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k}}_{a_k} (x-1)^k$ $\quad r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}$

$= 1$

$\Rightarrow$ konv. bei $x \in (0,2)$, div. bei $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (x-1)^k$$

$x = 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\rightsquigarrow$ harm. Reihe, divergent

$x = 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Beispiel

d) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k \qquad r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!}} = \frac{1}{\infty} = 0$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + 1\cdot x^4 + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (a_k) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$

$\Rightarrow (\sqrt[k]{|a_k|}) = (1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots)$

$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$

$\Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2}$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Satz

Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

(a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot x^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}\cdot(2k+1)}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k\, x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x)$$

Potenzreihen

Beispiele

Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \qquad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 + 6z + 12z^2 + \dots\right) \text{ für } |z| < 1$$

Bemerkung

Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Potenzreihen

Beispiel

Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihen

Weitere Anwendung

Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihen

Bemerkungen

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind C^∞-Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer Taylor-Reihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{für } |x - x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz Buch Kap. 3

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls.

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz Buch Kap. 3

Beispiel

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Rechenregeln für Potenzreihen

Satz

Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

(a) $$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

(b) $$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_1 \text{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

(c) Cauchy-Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \qquad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2).$$

Rechenregeln für Potenzreihen

Buch Kap. 3

Beispiele

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \left(a_0 x^0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + \dots\right)\left(b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \dots\right)$$

$$\begin{aligned}
= {} & a_0 b_0 x^0 + a_0 b_1 x^1 + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \dots \\
& + a_1 b_0 x^1 + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + \dots \\
& + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + a_2 b_3 x^5 + \dots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & a_0 b_0 x^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\
& + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots\dots + \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}\right) x^k + \dots \\
= {} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}\right) x^k
\end{aligned}$$

Rechenregeln für Potenzreihen

Buch Kap. 3

Beispiele

$x, y \in \mathbb{C}$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell y^{k-\ell}}{\ell!\,(k-\ell)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!\,(k-\ell)!} x^\ell y^{k-\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell}}_{= (x+y)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y)$$