Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel

Beh: $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ konv.

$\displaystyle\Longleftrightarrow \int_{10000}^\infty f(x)\,dx$ konv.

Gilt wegen $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^{10000} f(x)\,dx + \int_{10000}^\infty f(x)\,dx$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel

a) $\alpha > 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

b) $\alpha \leq 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \infty$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.41: (Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale)

Die Funktion $f(x)$ sei über jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ Riemann integrierbar.
Das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists X > a \; \forall X < x_1 < x_2 : \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

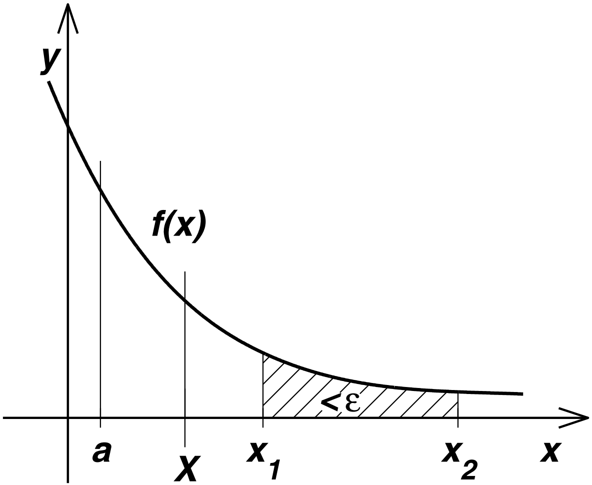
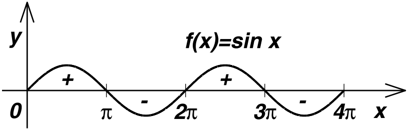


Abbildung 2.63: Zur Konvergenz uneigentlicher Integrale der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16



divergent !

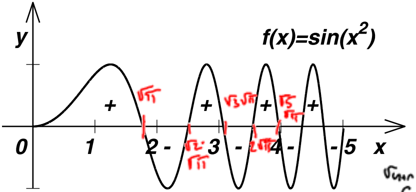
Abb. 2.64: Zum Integral $\int_0^\infty \sin x \, dx$,

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{\sin x^2}_{\geq 0} dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \underbrace{\sin x^2}_{\leq 0} dx + \int_{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} \underbrace{\sin x^2}_{\geq 0} dx + \int_{\sqrt{3}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{4}\sqrt{\pi}} \underbrace{\sin x^2}_{\leq 0} dx + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n+1}\sqrt{\pi}} \sin x^2 \, dx$$

mon. Nullfolge

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n+1}\sqrt{\pi}} |\sin x^2| \, dx$$

Konv. nach Leibniz



$$\int_{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n+1}\sqrt{\pi}} |\sin x^2| \, dx \leq \int_{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{n+1}\sqrt{\pi}} 1 \, dx = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

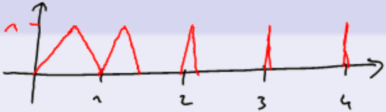
Abb. 2.65: Zum Fresnel Integral $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.42

Sei $f(x) \geq 0$ und monoton fallend.



$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Satz 2.43: Majorantenkriterium

$\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall x \geq c$

$f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq f(x)$ ~~auf $[a, \infty)$, dann:~~

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent } \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergiert .}$$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_{\frac{3}{2}}^{c+\frac{1}{2}} \frac{1}{y}\,dy = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{1}{y}\,dy = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$$

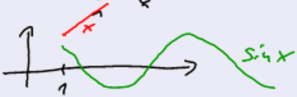
(subst. $y = x+\frac{1}{2}$)

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \ \wedge\ \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ konv.} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx \text{ konv.}$$

$$\Rightarrow \int^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx \text{ konv.}$$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+\frac{1}{2}\sin x}\,dx$



$$x+\frac{1}{2}\sin x \le x+\frac{1}{2} \quad \forall x \ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{2}\sin x} \ge \frac{1}{x+\frac{1}{2}}, \text{ aber } \int_1^\infty \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\,dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ div.} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x+\frac{1}{2}\sin x}\,dx \text{ div.}$$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.44

$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergent.

Satz 2.45

f sei über jedes beschränkte Teilintervall von $[a, \infty)$ $(a > 0)$ integrierbar, $c \geq a$ und $M > 0$.

a) $|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ mit $\alpha > 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergent,

b) $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ mit $\alpha \leq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\, dx$ divergent.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

Integralkriterium für Reihen

Buch Kap. 3.1

Satz 3.12: (Integralkriterium für Reihen)

Ist f auf $[m, \infty)$ (m ganzzahlig) positiv und monoton fallend, so haben die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

und das uneigentliche Integral

$$\int_m^{\infty} f(x)dx$$

gleiches Konvergenzverhalten.

Integralkriterium für Reihen

Buch Kap. 3.1

Beispiel

a) Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Divergiert, da $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}$ divergiert.

b) Betrachte (für $\alpha > 0$) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$:

Es gilt: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konv. $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konv. $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\zeta(\alpha)$ „Riemannsche Zetafunktion"

Integration bei Polen am Rand

Buch Kap. 2.16

Erinnerung

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$ erklärt und auf jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, Riemann integrierbar. Wir setzen

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \text{ falls } b < \infty,$$

Analoges gilt bei Funktionen auf dem links offenen Intervall $(a, b]$.

Integration bei Polen am Rand

Buch Kap. 2.16

Beispiel

a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\searrow 0} -\log c = \infty$

b) $\alpha > 1$: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{c\searrow 0} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_c^1$

$= \infty$

c) $\alpha < 1$: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\searrow 0} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-\alpha}$

Also $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \infty & : \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & : \alpha < 1 \end{cases}$

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ ?$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(x)dx \qquad = \int_{-a}^{\infty} f(-x)dx$$

Bsp: $$\int_{-\infty}^{a} e^x dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^a e^x dx = \lim_{c \to -\infty} e^a - e^c$$

$$= e^a$$

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \, ?$$

Wähle $c \in \mathbb{R}$ bel.

Setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$

Bsp $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Es gilt $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \underline{\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx} + \int_{1}^{\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq e^{-x}}dx \Rightarrow$ Konvergenz

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_a^\infty f(x)dx,$$

wobei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$?

Wähle $c \in (a, \infty)$ bel.

Def. $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_a^b f(x)dx,$$

wobei $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$