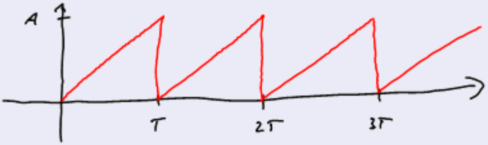
Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel



$$f(t) = \frac{A}{T}\, t \qquad \forall\, t \in [0, T)$$

$$k \neq 0: \gamma_k = c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{-1}{ik\omega}\, e^{ik\omega t} \quad (k \neq 0)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T}\, t\, e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T \underbrace{t}_{u}\, \underbrace{e^{-ik\omega t}}_{v'}\, dt$$

$$= \frac{A}{T^2} \left(\frac{t}{-ik\omega}\, e^{-ik\omega t} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{1}{-ik\omega}\, e^{-ik\omega t}\, dt \right)$$

$$= \frac{A}{T^2} \left(\frac{T}{-ik\omega}\, e^{-ik\omega T} - \frac{1}{(ik\omega)^2}\, e^{-ik\omega t} \Big|_0^T \right)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

$$\frac{A}{-T\, ik\omega} e^{-ik\omega T} - \frac{A}{T^2 (ik\omega)^2} \cancel{\left(e^{-ik\omega T} - e^{-ik\omega\cdot 0}\right)}$$

$$e^{-ik\omega T} = e^{-ik\frac{2\pi}{T}T} = e^{-ik\cdot 2\pi} = \cos(2\pi k) - i\sin(2\pi k) = 1 - i\cdot 0 = 1$$

WICHTIG !!!

$$= \frac{A}{-T\, ik\omega}$$

$$= \frac{A}{T\omega k} i = \frac{A}{T\frac{2\pi}{T}k} i = \frac{A}{2\pi k} i$$

$$\left(\frac{1}{i} = \frac{i}{i\cdot i} = \frac{i}{-1} = -i\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i0\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t\, dt = \frac{1}{T}\frac{A}{T}\frac{T^2}{2} = \frac{A}{2}$$

Fourier-Reihe: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t}\right)$

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A}{2\pi k} i\, e^{ik\omega t} - \frac{A}{2\pi k} i\, e^{-ik\omega t}\right)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel

$$= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{2\pi k} \cdot i \cdot 2i \quad \frac{1}{2i} \left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t} \right) \right)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \sin(k\omega t)$$

Reelle Darstellung: $\quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega t)$$

$\Rightarrow \quad a_0 = A \qquad a_k = 0 \quad \forall\, k \geq 1$

$\qquad b_k = -\frac{A}{\pi k} \qquad \forall\, k \geq 1$

Alternativ: $\quad a_0 = 2c_0 = A \quad \checkmark$

$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{A}{2\pi k i} - \frac{A}{2\pi k i} = 0 \quad \checkmark$

$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{A}{2\pi k} + \frac{A}{2\pi k} = \frac{A}{\pi k} \quad \checkmark$

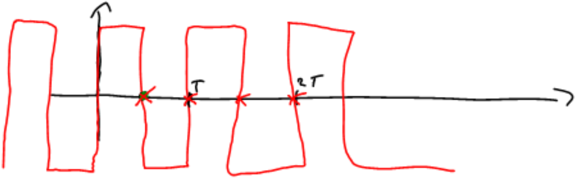
Berechnung der Fourier-Koeffizienten

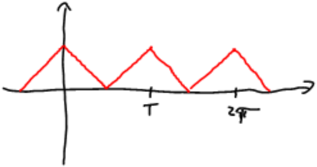
Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten

Wenn

- $f(t) = f(-t)\ \forall \cancel{t} \in \mathbb{R}$, dann gilt $b_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ (gerade)
- $-f(t) = f(-t)\ \forall \cancel{t} \in \mathbb{R}$, dann gilt $a_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ (ungerade)
- $f(t) = -f(t + T/2)\ \forall \cancel{t} \in \mathbb{R}$, dann gilt $a_k = b_k = 0\ \forall k \in \{0, 2, 4, 6, ...\}$ (Halbwellensymmetrie)

Punktsymmetrie bzg. $(\frac{T}{2}, 0)$





$\Rightarrow a_k = 0\ \forall k \geq 0$

$\wedge\ b_2 = b_4 = b_6 = \dots = 0$

In der Tat

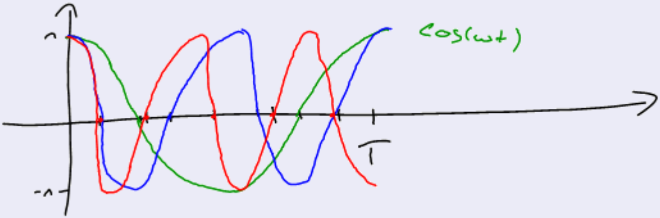
$b_k = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)$

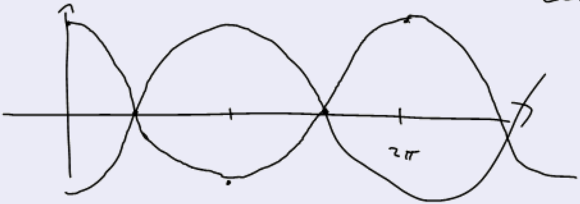
$a_k = 0$

$\Rightarrow b_k = 0\ \forall k \geq 1$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel





$$\cos(\pi - t) = -\cos(-t) =$$
$$= -\cos(t)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Definition 3.19 (stückweise glatte Funktion)

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt **stückweise glatt**, wenn gilt:

a) f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.

b) In diesen Ausnahmepunkten t_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $f(t_i + 0)$ und $f(t_i - 0)$ sowie $f'(t_i + 0)$ und $f'(t_i - 0)$.

c) In allen Punkten t_i ist der Funktionswert $f(t_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(t_i) = \frac{1}{2}(f(t_i + 0) + f(t_i - 0)) \ .$$

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

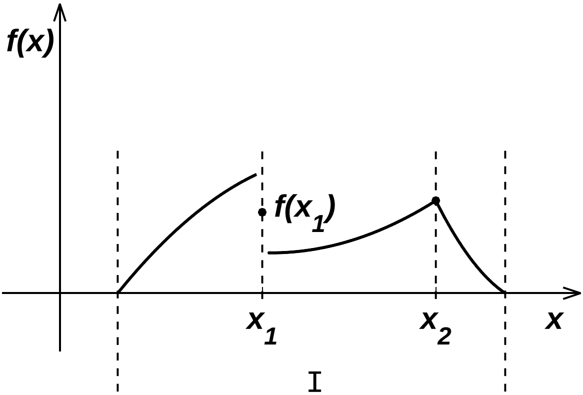


Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

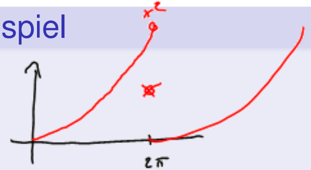
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- punktweise gegen f.
- In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.
- An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.

Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel



$$f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in (0, 2\pi)$$

$$f(2\pi) = 2\pi^2$$

$k > 0$:

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{e^{-ikt}}_{v'}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2}{-ik} e^{-ikt} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{2x}{ik} e^{-ikt}\, dt \right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{2\pi(-ik)} + \frac{1}{\pi i k} \left(\frac{x e^{-ikt}}{-ik} \Big|_0^{2\pi} - \cancel{\int_0^{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt}\, dt} \right)$$