Sinus und Kosinus

Definition

sin, cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Satz:

Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} \cdot (\exp(iz) - \exp(-iz)),$$
$$\cos(z) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(iz) + \exp(-iz)).$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x), \quad \cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix)), \quad \sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Sinus und Kosinus

Warum?

$$\exp(iz) = \frac{1}{0!} i^0 z^0 + \frac{1}{1!} i^1 z^1 + \frac{1}{2!} i^2 z^2 + \frac{1}{3!} i^3 z^3 + \frac{1}{4!} i^4 z^4 + \frac{1}{5!} i^5 z^5 + \dots$$

$$= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \cancel{\frac{1}{1!} i z} + \frac{1}{2!} (-1) z^2 + \cancel{\frac{1}{3!} (-i) z^3} + \frac{1}{4!} \cdot 1 z^4 + \cancel{\frac{1}{5!} i z^5} + \dots$$

$$\exp(-iz)$$

$$= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \cancel{\frac{1}{1!} i z} + \frac{1}{2!} (-1) z^2 - \cancel{\frac{1}{3!} (-i) z^3} + \frac{1}{4!} \cdot 1 z^4 - \cancel{\frac{1}{5!} i z^5} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right) = \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \frac{1}{8!} z^8$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z)$$

Analog: $\frac{1}{2i} \left(\exp(iz) - \exp(iz)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sin(z)$

Warum?

$x \in \mathbb{R}$

$$\exp(ix) = \frac{1}{2}\left(\exp(ix) - \exp(-ix)\right) + i\frac{1}{2i}\left(\exp(ix) - \exp(-ix)\right)$$

$$= \underset{\in \mathbb{R}}{\cos(x)} + i \underset{\in \mathbb{R}}{\sin(x)}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(a+bi) = \exp(a)\exp(ib)$$

$$= e^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)$$

$$|\exp(a+bi)| = e^a \underbrace{|\cos(b)+i\sin(b)|}_{=1}$$

$$= e^a$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$$

Allgemein: $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$

$$e^{i\pi} = -1$$

Sinus und Kosinus

Buch Kap. 3

$\sin^2 + \cos^2$

$z \in \mathbb{C}$

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = 1$$

Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{iy}+e^{-iy}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{e^{i(x+y)}} + \cancel{e^{i(x-y)}} + \cancel{e^{i(y-x)}} + \underline{e^{-i(x+y)}} + \underline{e^{i(x+y)}} - \cancel{e^{i(y-x)}} - \cancel{e^{i(x-y)}} + \underline{e^{-i(x+y)}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y)$$

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}\left(e^{i(x+y)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}e^{iy}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)\left(\cos(y)+i\sin(y)\right)\right)$$

Sinus und Kosinus

Additionstheoreme

Was ist π?

Buch Kap. 3

Satz + Definition

Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$ mit $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$. Daher hat $\cos$ eine Nullstelle zwischen 0 und 2. Diese nennen wir $\pi/2$.
Weiter ist $\sin = -\cos'$ nichtnegativ auf $[0, 2]$. Daher gibt es genau eine die Nullstelle zwischen 0 und 2.

Folgerungen

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{=0}$ $\Rightarrow$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -\sin(x)$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\cos(x+\pi) = \cos\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$
$= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

$\sin(x+\pi) = \sin\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

$\cos(x + 2\pi) = \cos((x+\pi)+\pi) = -\cos(x+\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin((x+\pi)+\pi) = -\sin(x+\pi) = \sin(x)$

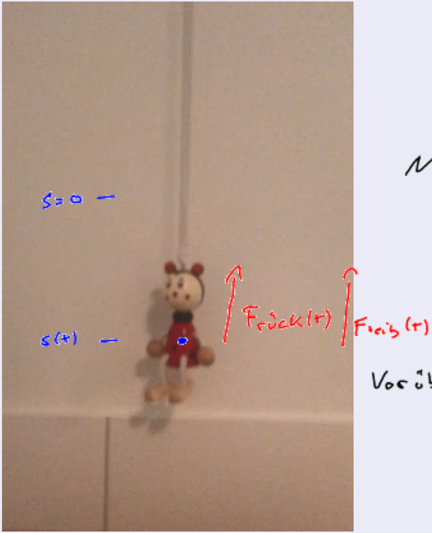
Sinus und Kosinus

Zusammenhang zu hyperbolischen Funktionen

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{i}\sinh(ix)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cosh(ix)$$

... ein bisschen Mechanik



$$F_{rück}(t) = -k\, s(t)$$

$$F_{reib}(t) = -d\, v(t) = -d\, \dot{s}(t)$$

Newtonsches Gesetz

$$m\, \ddot{s}(t) = -d\, \dot{s}(t) - k\, s(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) + \frac{d}{m}\dot{s}(t) + \frac{k}{m} s(t) = 0 \quad (*)$$

Vorüberlegung: Ist s_1, s_2 Lsg. von $(*)$, und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, so ist auch $c_1 s_1 + c_2 s_2$ Lsg von $(*)$

Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

$$\ddot{s}(t) + \frac{d}{m}\dot{s}(t) + \frac{k}{m}s(t) = 0$$

Ansatz $\quad s(t) = e^{\lambda t} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \qquad \Rightarrow \ddot{s}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \ \dot{s}(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$$0 = \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{d}{m}\lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = \left(\lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4km}}{2m}$$

Annahme: $4km > d^2$

$$\lambda_{1/2} = \mu \pm i\omega \qquad \mu = -\frac{d}{2m}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4km - d^2}}{2m}$$

Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

$\Rightarrow \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C} : s(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ ist Lsg. von (*)

$$\begin{aligned} &= c_1 e^{\mu t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\ &\quad + c_2 e^{\mu t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Anfangsbed. $v(0) = 1$, $s(0) = 0$ $\qquad \mu = -\frac{d}{2m}$

$0 = s(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$s(t) = 2c_1 e^{\mu t} \cdot i \sin(\omega t) \qquad \Rightarrow s(t) = \frac{1}{\omega} e^{\mu t} \sin(\omega t)$

$\dot{s}(0) = 2c_1 \mu e^{\mu t} \cdot i \sin(\omega t) + 2c_1 e^{\mu t} i \cos(\omega t) \cdot \omega$

$1 = \dot{s}(0) = 2 c_1 \cdot i \cdot \omega \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2i\omega}$

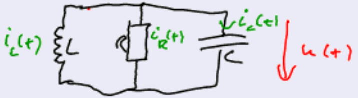
Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

Sinus und Kosinus

Buch Kap. 3

... ein bisschen Strom



Bauelementerelationen

$$u(t) = R\, i_R(t)$$

$$i_C(t) = C\, \dot{u}(t)$$

$$u(t) = L\, \dot{i}_L(t)$$

Kirchhoff' Gesetz

$$i_L(t) + i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{i}_L(t) + \dot{i}_R(t) + \dot{i}_C(t) = \frac{1}{L} u(t) + \frac{1}{R} \dot{u}(t) + C\, \ddot{u}(t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \ddot{u}(t) + \frac{1}{RC} \dot{u}(t) + \frac{1}{LC} u(t) \qquad \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

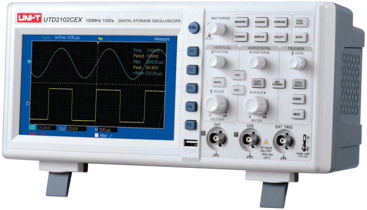
Sinus und Kosinus

... ein bisschen Strom

Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9



FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Definition 3.17:(periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt periodisch mit Periode $T > 0$. Das kleinste solche T, heißt die **Minimalperiode** oder auch primitive Periode von f.

Bemerkung

Ist f T–periodisch und integrierbar (über endlichen Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.