Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2018

Allgemeine Informationen

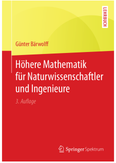
Informationsquellen

- **Internet**
  https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/18
- **Übungen in Tutorgruppen**
  Dr. Hanna Peywand Kiani und Übungsgruppenleiter(innen)
- **Anleitung zu den Übungen** (14-täglich)
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Mittwoch, E 3.079, 15:00–16:00

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2000.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Analysis II

1. Integration (bestimmte Integrale, Hauptsatz, Integrationsregeln, uneigentliche Integrale, parameterabhängige Integrale)
2. Anwendungen der Integralrechnung (Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern, Kurven und Bogenlänge, Kurvenintegrale)
3. periodische Funktionen und Fourier-Reihen
4. Potenzreihen und elementare Funktionen
5. Interpolation

Integration

Integration

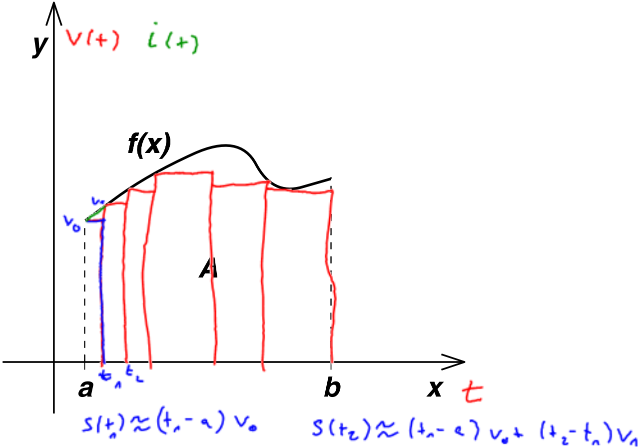
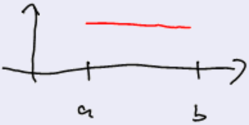


Abbildung 2.52: Fläche *A* unter dem Graph der Funktion *f*

Integration

Beispiel

$f(x) = c \in \mathbb{R}$

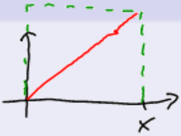


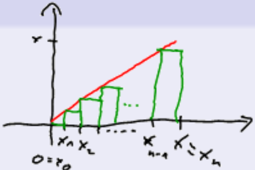
$A = (b-a) \cdot c$

$$1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beispiel

$f(x) = x$





Ad hoc: Flächeninhalt des Quadrats: x^2

$\Rightarrow$ " unter Funktionsgraph: $A = \frac{x^2}{2}$

Rigoros: Wähle $x_0, \dots, x_n$ mit $x_0 = 0$, $x_n = x$, „äquidistant"

$\Rightarrow x_0 = 0,\ x_1 = \frac{x}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}x,\ x_3 = \frac{3}{n}x,\ \dots,\ x_n = \frac{n}{n}x = x$

also $x_i = \frac{i}{n}x \quad i = 0, \dots, n$

$$A \approx (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{x}{n}} \underbrace{f(x_{i-1})}_{=x_{i-1}}$$

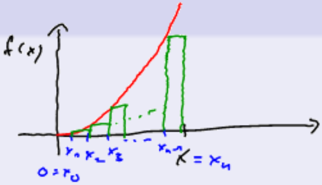
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} \frac{i-1}{n} x = \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{x^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x^2}{2}$$

Integration

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$f(x) = x^2$



Wähle $0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = X$ äquidistant

$\Rightarrow x_i = \frac{i}{n} X \qquad i = 0, \dots, n$

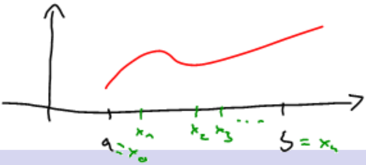
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{X}{n}} \underbrace{f(x_{i-1})}_{x_{i-1}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X}{n} (i-1)^2 \frac{X^2}{n^2} = \frac{X^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{X^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$x_{i-1}^2 = \left(\frac{i-1}{n} X\right)^2 = (i-1)^2 \frac{X^2}{n^2}$$

$$= \frac{X^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{X^3}{3}$$

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13



Zerlegung

- Es wird eine Streifeneinteilung gebildet, wobei jeweils Streifen der Breite Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, mit den beliebig gewählten Punkten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

betrachtet werden.

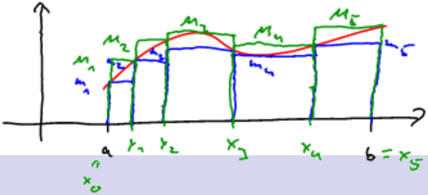
- Die Menge der so gebildeten Teilintervalle

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

heißt Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13



Zerlegung

- Die größte der Teilintervalllängen Δx_i

$$|Z| := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

heißt Feinheit der Zerlegung Z.

- Man bildet in jedem Streifen zwei Rechtecke, die die Fläche von f von "oben" und von "unten" annähern. Falls f beschr"ankt ist, existiert auf allen Teilintervallen obere und untere Grenze

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) .$$

Integration, Zerlegungen

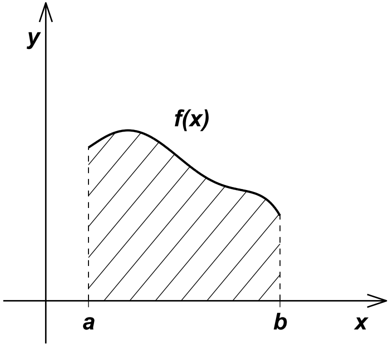
Ober-/Untersumme

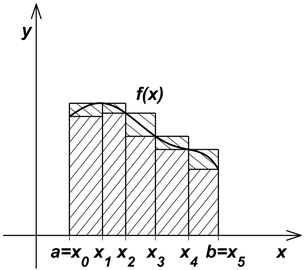
- Über dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ entsteht ein "unteres" Rechteck mit dem Flächeninhalt $m_i \Delta x_i$ und ein "oberes" Rechteck mit dem Flächeninhalt $M_i \Delta x_i$.
- Eine Summation über i ergibt

$$\begin{aligned} S_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, && \text{die Obersumme von } f \text{ bezüglich } Z, \text{ und} \\ s_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, && \text{die Untersumme von } f \text{ bezüglich } Z. \end{aligned}$$

Integration, Zerlegungen

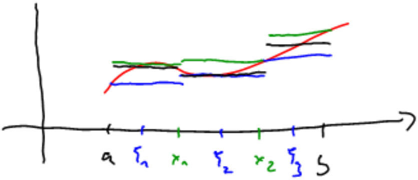
Buch Kap. 2.13





Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13



Ober-/Untersumme

- Wählt man mit ξ_i einen beliebigen Punkt aus dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ und deshalb auch

$$s_f(Z) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S_f(Z) \, .$$

- Die Summe $R(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Ober-/Unterintegral

- Bei immer feiner werdenden Zerlegungen die Obersummen im Allg. immer kleiner und die Untersummen immer größer werden.

$$\overline{I}_f := \inf_Z S_f(Z), \qquad \text{genannt Oberintegral von } f,$$

$$\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z), \qquad \text{genannt Unterintegral von } f.$$

Dabei bedeutet $\inf_Z$ und $\sup_Z$, dass das Supremum bzw. Infimum über der Menge aller Zerlegungen gebildet wird.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Ober-/Unterintegral

- Sind Z_1 und Z_2 zwei beliebige, unterschiedliche Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, dann kann man eine verfeinerte Zerlegung Z aus den Durchschnitten der Teilintervalle von Z_1 und Z_2 bilden. Es gilt dann

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2)\ ,$$

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1)\ .$$

Integration, Zerlegungen

Ober-/Unterintegral

- Konsequenz: Für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

  ist. Daher ist die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist, und die Menge der Untersummen nach oben.
- Daraus folgt die Existenz von $\overline{I}_f$ und $\underline{I}_f$ und

$$\underline{I}_f \leq \overline{I}_f.$$

  Es folgt

$$\underline{I}_f \leq R(Z) \leq \overline{I}_f.$$

Ober-/Unterintegral

- Für stetige Funktionen auf jeden Fall, aber auch für viele andere übliche Funktionen ist $\underline{I}_f = \overline{I}_f$. Ist (Z_k) eine Zerlegungsfolge, für die $\lim_{k\to\infty} |Z_k| = 0$ gilt, so heißt (Z_k) oder zulässige Zerlegungsfolge. Gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \underline{I}_f = \lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \overline{I}_f = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) \ .$$

Die durchgeführten Betrachtungen rechtfertigen die folgende Definition.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Definiton 2.34: (Integrierbarkeit, RIEMANNsches Integral)

Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt im Intervall $[a, b]$ RIEMANN-integrierbar, falls das Unter- und Oberintegral von f übereinstimmen, also

$$\underline{I}_f = \overline{I}_f.$$

Der gemeinsame Grenzwert $\overline{I}_f = \underline{I}_f$ wird bestimmtes RIEMANNsches Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ genannt und mit

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

a heißt untere und b obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ wird Integrationsintervall genannt. x heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.

Riemann-Integral

Satz 2.33: (RIEMANNsches Integral)

Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:
f ist genau dann integrierbar, wenn jede Folge RIEMANNscher Summen $R(Z_k)$ von f, bei denen die Feinheiten $|Z_k|$ der zugehörigen Zerlegungen gegen Null streben und die Punkte ξ_i in den Teilintervallen von Z_k beliebig gewählt werden, gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist dann gleich $\int_a^b f(x)\,dx$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Riemann-Integral

Beispiele

Eine Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist.

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 : & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es gilt für $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0 \quad , \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow S_f(Z) = 1 \qquad s_f(Z) = 0 \quad \Rightarrow \overline{I}_f = 1 \; , \; \underline{I}_f = 0$$

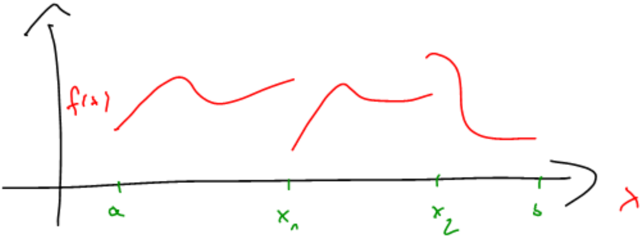
Also $\overline{I}_f > \underline{I}_f \Rightarrow f$ ist nicht integrierbar

Riemann-Integral

Buch Kap. 2.13

Satz 2.34: (Stetigkeit $\Longrightarrow$ Integrierbarkeit)

Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar.
Das gilt auch für stückweise stetige Funktionen, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler Sprungstellen stetig sind.



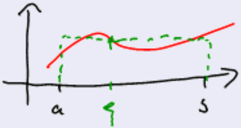
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

Riemann-Integral

Satz 2.35: (Mittelwertsätze der Integralrechnung)

1. **Mittelwertsatz der Integralrechnung**
   Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$



2. **verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung**
   Sind die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $g(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Riemann-Integral

Buch Kap. 2.13

Satz 2.36: (Rechenregeln der Integralrechnung)

Seien f und g integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, dx = c_1 \int_a^b f\, dx + c_2 \int_a^b g\, dx$,
- $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$,
- $\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$,
- $f \geq 0$ auf $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f\, dx \geq 0$,
- ist f auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie $\int_a^b f\, dx = 0$, so folgt $f \equiv 0$.

Integration, Stammfunktion

Buch Kap. 2.13

Definition 2.33: (Stammfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion. Die differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.
Stammfunktionen sind nur bis auf Konstanten festgelegt, d.h. mit F ist auch $F + C$ für $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung

Buch Kap. 2.13

Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (x, a \in I),$$

eine Stammfunktion von f.

Satz 2.37: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer auf einem Intervall I stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b .$$

Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung

Buch Kap. 2.13

Stammfunktion

Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\int f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Hierbei heißt $C \in \mathbb{R}$ Integrationskonstante.

Stammfunktionen

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1 \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1. \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen

noch mehr Beispiele

$$
\begin{aligned}
\int b^x\,dx &= \frac{1}{\log(b)}b^x + C \qquad \text{für } b>0, b\neq 1.\\
\int \log(x)\,dx &= x(\log(x)-1) + C \qquad \text{für } x>0.\\
\int \log_b(x)\,dx &= \frac{x}{\log(b)}(\log(x)-1) + C \qquad \text{für } b>0, x>0.\\
\int \sinh(x)\,dx &= \cosh(x) + C\\
\int \cosh(x)\,dx &= \sinh(x) + C\\
\int \tanh(x)\,dx &= \log(\cosh(x)) + C\\
\int \coth(x)\,dx &= \log(|\sinh(x)|) + C \qquad \text{für } x\neq 0.
\end{aligned}
$$