Aufgabe 1) [6+ 4]

a) Gegeben seien die Kurve (Schraubenlinie)

$$c : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^3 , \qquad c : t \longmapsto (3\cos(t)\, , 3\sin(t)\, , 4t\,)^T$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cdot \left(\frac{z}{3}\right)^2$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c .

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 6] \to \mathbb{R} , \qquad f(t) = 3 - t .$$

Berechnen Sie die reellen Fourier–Koeffizienten der 12 –periodischen, geraden Fortsetzung von f .

Lösung :

a)

$$\dot{c}(t) = (-3\sin(t)\, , 3\cos(t)\, , 4\,)^T \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2 + 4^2} = \sqrt{3^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 16},$$

$$= \sqrt{9 + 16} = 5 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$f(c(t)) = (9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)) \cdot \left(\frac{4t}{3}\right)^2 1 = 9 \cdot \left(\frac{16t^2}{9}\right) = 16t^2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_0^{3\pi} f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\|\, dt = \int_0^{3\pi} 16t^2 \cdot 5dt$$

$$= \left.\frac{80t^3}{3}\right|_0^{3\pi} = 720\pi^3 . \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

b) $b_k = 0$ da Funktion gerade!! **[1 Punkt]**

$T = 12, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\, dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 (3 - t)dt = \frac{1}{3} \left[3t - \frac{t^2}{2}\right]_0^6 = \frac{1}{3}(18 - 18) = 0 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ rechnet man wie folgt.

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^6 (3-t)\cos(\frac{k\pi}{6}t)dt \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\left[(3-t)\frac{\sin(\frac{k\pi}{6}t)}{\frac{k\pi}{6}}\right]_0^6 - \int_0^6 (-1)\frac{\sin(\frac{k\pi}{6}t)}{\frac{k\pi}{6}}dt\right) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{-3\sin(k\pi)-3\sin(0)}{\frac{k\pi}{6}} - \left[\frac{\cos(\frac{k\pi}{6}t)}{\frac{k^2\pi^2}{6^2}}\right]_0^6\right) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \frac{36}{3k^2\pi^2}\left(-\cos(k\pi)+\cos(0)\right) = \frac{12}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k)\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2) (4+3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \Big(2\sin(x) + 3\sqrt{\sin(x)}\Big) \cdot \cos(x)\, dx\,.$$

b) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Existenz

$$\int_2^{\infty} \frac{x^2 + x}{x^4 + x^3 + 1}\, dx\,.$$

c) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{6x \;-\; 6\sin(x)}{x^3}, & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x;0)$ von g zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an, ohne Ableitungen zu berechnen.

Tipp: Potenzreihe!

Lösung: (4+3++3 Punkte)

a)

$$\int_0^{\pi/2} \Big(2\sin(x) + 3\sqrt{\sin(x)}\Big) \cdot \cos(x)\, dx\,. \qquad u = \sin(x),\ \frac{du}{dx} = \cos(x)$$

$$= \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \big(2u + 3\sqrt{u}\big)\; du \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \left[\, u^2 + 3\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \,\right]_{u(0)}^{u(\pi/2)} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \Big[\, u^2 + 2u^{\frac{3}{2}} \Big]_0^1 \qquad \textbf{Grenze/Rücksbstitution [1 Punkt]}$$

$$= 3\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

b) **[3 Punkte]**

$$\int_2^{\infty} \frac{x^2 + x}{x^4 + x^3 + 1}\, dx\,.$$

Für $x \geq 2$ gilt:

$$\frac{x^2+x}{x^4+x^3+1} \;<\; \frac{x^2+x}{x^4} \;<\; \frac{2x^2}{x^4} \;=\; \frac{2}{x^2}\,.$$

Nach Vorlesung konvergiert $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ und damit nach Majorantenkriterium auch $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+x}{x^4+x^3+1}\,dx$.

c)

$$g(x) \;=\; \frac{6x - 6\sin(x)}{x^3} \;=\; \frac{6x - 6\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^3} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \frac{6x - 6\left(x + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)}{x^3} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot 6\cdot\frac{x^{2k-2}}{(2k+1)!}$$

$$T_2(x;0) \;=\; (-1)^{1-1}\cdot 6\cdot\frac{x^{2-2}}{(2+1)!} \;+\; (-1)^{2-1}\cdot 6\cdot\frac{x^{4-2}}{(4+1)!} \;=\; 1 \;-\; \frac{x^2}{20}\,.$$

[1 Punkt]