ANALYSIS II

J. Behrens

07.07.2017

① Trapezregel für äquidistante Teilung von $[a,b]$

- Sei $x_k = a + kh$

  $k = 0,\dots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}$

- Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h}$$

$$= h \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

$$= h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right)$$

② Lagrange-Polynom – konstruktiver Nachweis:

<u>Idee:</u> Konstruiere ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$, so dass

$$p_n(x_i) = y_i \qquad i=0,\dots,n$$

<u>Wie?:</u> Könnten wir $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y_j$ konstruieren,

so dass
$$a_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j \end{cases}$$

dann gilt $p_n(x_i) = y_i$

<u>Lagrange-Polynome:</u> Die Polynome

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot \dots \cdot (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdot \dots \cdot (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \cdots (x_j-x_n)}$$

haben genau die gewünschte Eigenschaft.

③ Gleichungssystem für Newton-Interpolation:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Also

$$p_n(x_0) = b_0 \overset{!}{=} y_0$$

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1-x_0) \overset{!}{=} y_1$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_n) = b_0 + b_1(x_n-x_0) + b_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + \dots + b_n(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

Berechnung ist mittels rekursivem Einsetzen möglich falls $x_i \neq x_j, i \neq j$

④ Beispiel Dividierten Differenzen:

Gegeben:

x_i	1	2	3
y_i	3	2	6

Gesucht: Polynom $p_2(x)$ 2-ten Grades

Schema:

$x_{i+2}-x_i$	$x_{i+1}-x_i$	x_i	$[x_i]=y_i$	Δ	$[x_{i+1},x_i]$	Δ	$[x_0,x_1,x_2]$
		1	3				
	1			-1	-1		
2		2	2			5	2.5
	1			4	4		
		3	6				

$\Rightarrow [x_0] = 3 \quad , [x_0 x_1] = -1 \quad , [x_0 x_1 x_2] = 2.5$

$\Rightarrow P_2(x) = [x_0] + [x_0 x_1](x-x_0) + [x_0 x_1 x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$= 3 - (x-1) + 2.5(x-1)(x-2)$

$= 2.5x^2 - 8.5x + 7$