Analysis II

J. Behrens

22. 06. 2017

① Besselsche Ungleichung :

- Wir verwenden die Orthogonalitätsrelationen des trigonom. Funktionensystems.
- Es gilt:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\} \right]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f^2(x) - 2f(x)[\ldots] + [S_m(x)]^2 \right] dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$\boxtimes$

② Fourier-Koeffizienten für eine ungerade Funktion f:

f ungerade $\quad$ sin ungerade $\Rightarrow$ $f(x) \cdot \sin(nx) = g(x)$ gerade Fkt.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{-\pi} g(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx$$

Substitution $u = -x$

$$= \int_{0}^{\pi} g(u)\,du + \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} g(x)\,dx$$

Andererseits: Produkt der ungeraden Funktion f mit geraden cos ist ungerade

Das Integral über $[-\pi, \pi]$ einer ungeraden Fkt. ist Null.

③ Sägezahn-Kurve:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } -\pi < x < \pi \quad , \; a > 0 \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases} \Bigg\} \text{periodisch fortgesetzt}$$

- f ist ungerade $\Rightarrow$ $a_0, a_1, \ldots = 0$
- b_k berechnen sich:

$$b_k = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(kx)\, dx$$

$$= \frac{2a}{\pi} \cdot \left(\left[-x \, \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{2a}{k} (-1)^{k+1}$$

- Reihendarstellung für die Sägezahnfunktion:

$$f(x) = 2a \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \cdots \right)$$

- Setzen $a = 1$ und betrachte nur $]-\pi, \pi[$

$$\Rightarrow \quad x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \cdots \right)$$

Analysis II

23.06.2017

① Besselsche Ungleichung:

- Sei $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$
- Es gilt: $0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) - 2f(x)s_n(x) + s_n^2(x)] \, dx$$

wg Orthogonalitätsrelationen

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$\boxtimes$

② Fourier-Koeffizienten (un)gerader Funktionen:

- f ungerade $\Rightarrow$ $f \cdot \sin = g$ gerade (da sin ungerade)
- $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{0} g(x) \, dx + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$

$$= -\int_{0}^{-\pi} g(x) \, dx + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$$

Substitution $u = -x$

$$= \int_{0}^{\pi} g(u) \, du + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$$

- falls f gerade $\Rightarrow f \cdot \cos = g$ gerade

Also gilt Analoges wie oben.

- f gerade $\Rightarrow f \cdot \sin = u$ ungerade und $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0$

Daher für f gerade ist $b_k = 0$ (analog für f ungerade $a_k = 0$) $\boxtimes$

③ Sägezahn-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}, \quad a > 0$$

periodisch fortgesetzt. f ist ungerade also $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$

- Für b_k gilt:

$$b_k = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2a}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx)\,dx}_{=0} \right\}$$

$$= \frac{2a}{k} (-1)^{k+1}$$

- Für die Reihendarstellung:

$$f(x) = 2a \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \dots \right)$$

- Setze $a = 1$ und betrachte Intervall $]-\pi, \pi[$:

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \dots\right)$$

④ Komplexe Schreibweise:

- Wir wissen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und 2π-period.

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

- Außerdem gelten die Eulerschen Formeln

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad , \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

- Damit:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\right]$$

- Ziel: Kompakte Schreibweise.
  Dazu vereinbare: $b_0 := 0$, $a_{-n} := a_n$, $b_{-n} := -b_n$ $\quad n = 0, \dots$

  Setze: $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

- Erhalte damit:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}\right)$$

- Für die m-te Partialsumme gilt:

$$S_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}\right) = \sum_{n=-m}^{m} \alpha_n e^{inx}$$

- Da die Reihe konvergiert schreibe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}}$$

wir fassen dabei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ auf als $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und bilden eigentlich 2 Grenzwerte.