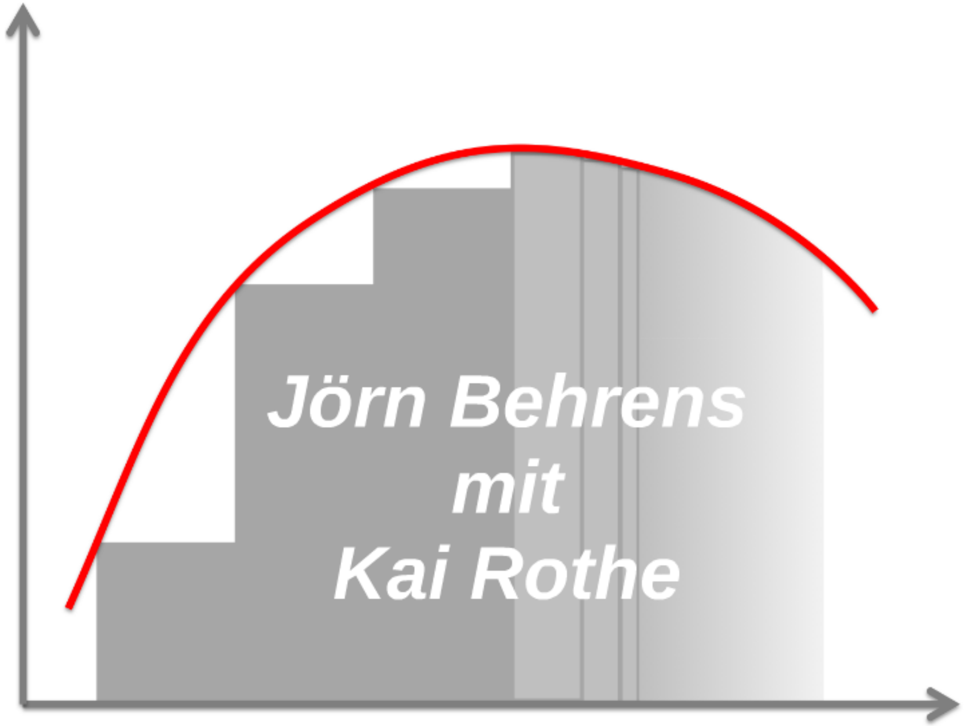
# Analysis II

Sommer 2017




*Jörn Behrens*
*mit*
*Kai Rothe*


## Fourier-Reihe

Buch Kapitel 3.8-3.9

# Erinnerung Sinus/Cosiuns

**Komplexe Exponentialfunktion:** Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die komplexe Exponentialfunktion. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

**Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion:** Es gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
- $\exp(z) \neq 0$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $a^z = \exp(z \ln(a))$ für $0 < a \in \mathbb{R}$
- $e^z = \exp(z)$

**Definition:** (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

**Bemerkung** (Taylorreihe für die Sinusfunktion)
Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2k+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k+2}(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + R_{2k+2}(x)$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.
Analoges gilt für $\cos$.

## Periodizität von $\cos$ und $\sin$

**Definition** (Zahl $\pi$)
Die Zahl $\pi$ ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

**Satz** (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)
Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind periodisch und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

**Komplexe Exponentialfunktion**: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die komplexe Exponentialfunktion. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

**Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion**: Es gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
- $\exp(z) \neq 0$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $a^z = \exp(z \ln(a))$ für $0 < a \in \mathbb{R}$
- $e^z = \exp(z)$

**Definition**: (Sinus und Cosinus)
Auf ganz $\mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\end{aligned}$$

Die so erklärten Funktionen heißen Sinus- und Cosinus Funktion.

**Eigenschaften**: (Sinus und Cosinus)
Aus den Reihendefinitionen für die Cosinus- und Sinusfunktion, sowie dem Additionstheorem für $\exp$ ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Eulersche Formel) und $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
- $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade Fkt.) und $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Fkt.)
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ (Additionsformel für $\cos$)
- $\sin(x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \sin y$ (Additionsformel für $\sin$)
- $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$
- $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 -1$ und $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

# Periodizität von $\cos$ und $\sin$

**Definition** (Zahl $\pi$)
Die Zahl $\pi$ ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

**Satz** (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)
Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind periodisch und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

**Bemerkung** (Taylorreihe für die Sinusfunktion)
Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{2k+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + R_{2k+2}(x)\end{aligned}$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.
Analoges gilt für $\cos$.

# Konstruktion von Funktionenreihen

**Konstruktion durch gliedweise Addition**: $(\cosh)$

Es gilt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Mit den Reihen für $e^x$ bzw. $e^{-x}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right] \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}.
\end{aligned}$$

**Bemerkung**: diese Reihe ist – wie die Exponentialreihe – beständig konvergent.

**Konstruktion mittels Cauchy-Produkt**: $(e^{-x}\sin x)$

Mit Hilfe des Cauchy-Produktes konstruiert man eine Reihe für $e^{-x}\sin x$:

$$\begin{aligned}
e^{-x}\sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\
&= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \cdots
\end{aligned}$$

**Konstruktion durch Integration**: $(\arctan x)$

Durch Integration von $\frac{1}{1+x^2}$ ergibt sich (beachte $\arctan 0 = 0$):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Bemerkung: wieder ist die Konvergenz nur für $-1 < x < 1$ gewährleistet.

**Konstruktion durch gliedweises Differenzieren**: $(\frac{1}{(1-x)^2})$

Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich gliedweise Differenzieren zu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

**Bemerkung**: Die so konstruierte Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$, da die geometrische Reihe nur dann konvergiert!

**Konstruktion durch Substitution**: $(\frac{1}{1+x^2})$

Ausgehend von der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich durch Substitution $u = -x^2$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^{\infty} u^k \\
\to \quad \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}
\end{aligned}$$

Bemerkung: gilt wieder für $|x| < 1$.

**Konstruktion durch gliedweise Addition**: $(\cosh)$

Es gilt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Mit den Reihen für $e^x$ bzw. $e^{-x}$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right] \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}.
\end{aligned}
$$

**Bemerkung:** diese Reihe ist – wie die Exponentialreihe – beständig konvergent.

**Konstruktion mittels Cauchy-Produkt**: $(e^{-x}\sin x)$

Mit Hilfe des Cauchy-Produktes konstruiert man eine Reihe für $e^{-x}\sin x$:

$$\begin{aligned}
e^{-x}\sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\
&= \left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\\
&= x-x^2+\frac{x^3}{3}-\cdots
\end{aligned}$$

**Konstruktion durch gliedweises Differenzieren**: $\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$

Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich gliedweise Differenzieren zu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

**Bemerkung**: Die so konstruierte Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$,
da die geometrische Reihe nur dann konvergiert!

**Konstruktion durch Substitution**: $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Ausgehend von der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich durch Substitution $u = -x^2$ konstruieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^{\infty} u^k \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

Bemerkung: gilt wieder für $|x| < 1$.

**Konstruktion durch Integration**: $(\arctan x)$

Durch Integration von $\frac{1}{1+x^2}$ ergibt sich (beachte $\arctan 0 = 0$):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Bemerkung: wieder ist die Konvergenz nur für $-1 < x < 1$ gewährleistet.

# Erinnerung Taylorreihe

**Konstruktion durch Taylorreihe**:

Jede auf $I \subset \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f$ lässt sich darstellen (Satz von Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0),$$

wobei $x, x_0 \in I$ und $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ das Lagrange Restglied mit $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$.

**Folgerung**: (Taylorreihe)

Falls auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Funktion $f$ beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0,$$

so lässt sich $f$ in einer Potenzreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

wobei $x, x_0 \in I$. Diese Reihe heißt Taylorreihe. Ist $x_0 = 0$, so heißt die Reihe auch McLaurin-Reihe.

**Frage**: Wann gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$?

- Für elementare Funktionen mit Definitionsbereich $D$ und $x, x_0 \in I \subset D$ immer!
- Für $x$ aus dem Konvergenzintervall der Reihe.
- Falls $|f^{(k)}(x_0)| \leq M$ für $M > 0$ unabhängig von $k$.

**Konstruktion durch Taylorreihe**:

Jede auf $I \subset \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f$ lässt sich darstellen (Satz von Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0),$$

wobei $x, x_0 \in I$ und $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ das Lagrange Restglied mit $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$.

**Folgerung**: (Taylorreihe)

Falls auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Funktion $f$ beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0,$$

so lässt sich $f$ in einer Potenzreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

wobei $x, x_0 \in I$. Diese Reihe heißt Taylorreihe. Ist $x_0 = 0$, so heißt die Reihe auch McLaurin-Reihe.

**Frage**: Wann gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$?

- Für elementare Funktionen mit Definitionsbereich $D$ und $x, x_0 \in I \subset D$ immer!
- Für $x$ aus dem Konvergenzintervall der Reihe.
- Falls $|f^{(k)}(x_0)| \leq M$ für $M > 0$ unabhängig von $k$.

# Periodische Funktionen

**Definition**: (Periodische Funktion)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche

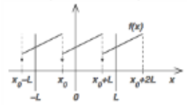
$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt ($L > 0$ konstant), heißt periodische Funktion.
Das kleinste $L$, für welches die Gleichung gilt, heißt Minimalperiode oder primitive Periode von $f$.
Jedes $n$-fache der Minimalperiode ist wieder Periode ($n \in \mathbb{N}$). $f$ heißt auch $L$-periodische Funktion.

**Beispiel**: $f(x) = \sin x$

- Minimalperiode: $2\pi$
- $2\pi$-periodische Funktion
- Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

Graphisches Beispiel:




**Definition**: (Trigonometrisches Funktionssystem)
Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

Ziel:
Periodische Funktionen mit Hilfe des trigonometrischen Funktionensystems darstellen!

**Bemerkung**: Jede $L$-periodische Funktion $f$ lässt sich durch die Transformation

$$\hat{f}(t) = f(t\frac{L}{2\pi})$$

in eine $2\pi$-periodische Funktion $\hat{f}$ umwandeln. (Betrachte also $2\pi$-periodische Funktionen).

**Konkret**: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion. Dann ist das Ziel, eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ zu finden.

Die Partialsummen $(s_m)$ werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \ldots$$

definiert.

**Definition**: (Periodische Funktion)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche

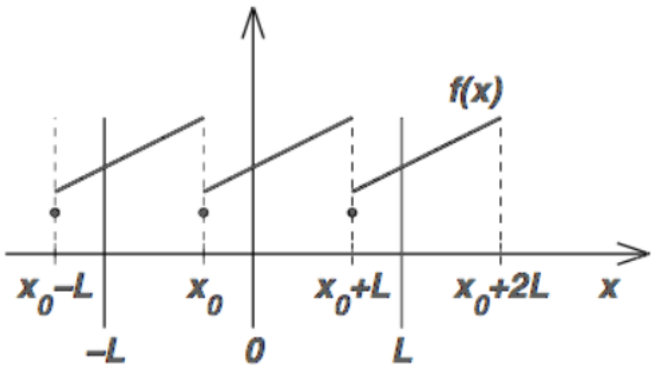
$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt ($L > 0$ konstant), heißt periodische Funktion.
Das kleinste $L$, für welches die Gleichung gilt, heißt Minimalperiode oder primitive Periode von $f$.
Jedes $n$-fache der Minimalperiode ist wieder Periode ($n \in \mathbb{N}$). $f$ heißt auch $L$-periodische Funktion.

**Beispiel**: $f(x) = \sin x$

- Minimalperiode: $2\pi$
- $2\pi$-periodische Funktion
- Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

**Graphisches Beispiel**:



**Definition**: (Trigonometrisches Funktionssystem)
Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

**Ziel**:
Periodische Funktionen mit Hilfe des trigonometrischen Funktionensystems darstellen!

**Bemerkung**: Jede $L$-periodische Funktion $f$ lässt sich durch die Transformation

$$\hat{f}(t) = f(t\frac{L}{2\pi})$$

in eine $2\pi$-periodische Funktion $\hat{f}$ umwandeln. (Betrachte also $2\pi$-periodische Funktionen).

**Konkret**: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion. Dann ist das Ziel, eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ zu finden.

Die Partialsummen $(s_m)$ werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \ldots$$

definiert.

# Fourier Reihe

**Frage**: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von $a_n, b_n$ darstellen als

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \lim_{m \to \infty} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] ?
\end{aligned}
$$

**Berechnungsformel**: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier-Koeffizienten $a_n, b_n$ berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
*1768 Auxerre †1830 Paris

**Frage**: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von $a_n, b_n$ darstellen als

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] ?
\end{aligned}
$$

**Berechnungsformel**: (Fourier Analyse)
Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die Fourier-Koeffizienten $a_n, b_n$ berechnen durch die Fourier-Analyse:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
*1768 Auxerre †1830 Paris

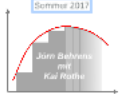
## Erinnerung Taylorreihe

## Periodische Funktionen

## Konstruktion von Funktionenreihen

# Analysis II

Sommer 2017




Fourier-Reihe

## Fourier Reihe

**Frage**: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von $a_n, b_n$ darstellen als

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\right] ?
\end{aligned}
$$

1

## Erinnerung Sinus/Cosiuns