ANALYSIS II

J. Behrens

15. 06. 2017

① **Frage:** Existiert die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] \quad ?$$

Idee: Nimm an, eine solche Darstellung existiere und gleichmäßig konvergiere.

Welche Bedingungen müssen dann die a_n und b_n erfüllen, um die Existenz der Reihe zu sichern?

Koeffizientenbestimmung:

Multipliziere mit $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ fest

integriere über $[-\pi, \pi]$

$$(*) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx \right]$$

Es gilt:
$$\cos(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{\sin[(n+k)x] - \sin[(n-k)x]\right\}$$
$$\sin(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{\cos[(n+k)x] - \cos[(n-k)x]\right\}$$
$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left\{\cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x]\right\}$$
für $k, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx &= 0\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx &= \delta_{nk}\,\pi\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx &= \delta_{nk}\,\pi
\end{aligned}\right\}$$
Orthogonalitätsrelationen des trigonometrischen Funktionensystems.

Kronecker-Symbol
$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \quad n,k \in \mathbb{N}$$

Anwendung der Orthogonalitätsrelationen auf (*)
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = b_k\,\pi$$

Analog erhält man durch Multiplikation mit $\cos(kx)$:
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = a_k\,\pi & (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = a_0\,\pi \end{cases}$$

Insgesamt erhalte ich:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx \qquad && n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx \qquad && n = 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$

Analysis II

16.06.2017

① **Frage:** Existiert die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] \quad ?$$

Idee: Nimm an, die Darstellung existiere und sei glm. konvergent.
Neue Frage: Welche Bedingungen erfüllen dann die a_n, b_n um die Existenz zu sichern?

Koeffizientenbestimmung:

Multiplizieren mit $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ fest,
integriere im $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \sin(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx \right]$$

Es gilt:

$$\cos(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \sin[(n+k)x] - \sin[(n-k)x] \right\}$$

$$\sin(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \cos[(n+k)x] - \cos[(n-k)x] \right\}$$

$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x] \right\}$$

$(k, n) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \delta_{nk}\,\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \delta_{nk}\,\pi$$

Orthogonalitätseigenschaft des trigonometrischen Funktionensystems

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = b_k\,\pi$$

Analog erhält man bei Multiplikation mit $\cos(kx)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = a_k\pi & \text{für } k \in \mathbb{N} \\ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = a_0\pi & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Auflösung nach a_k / b_k:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$