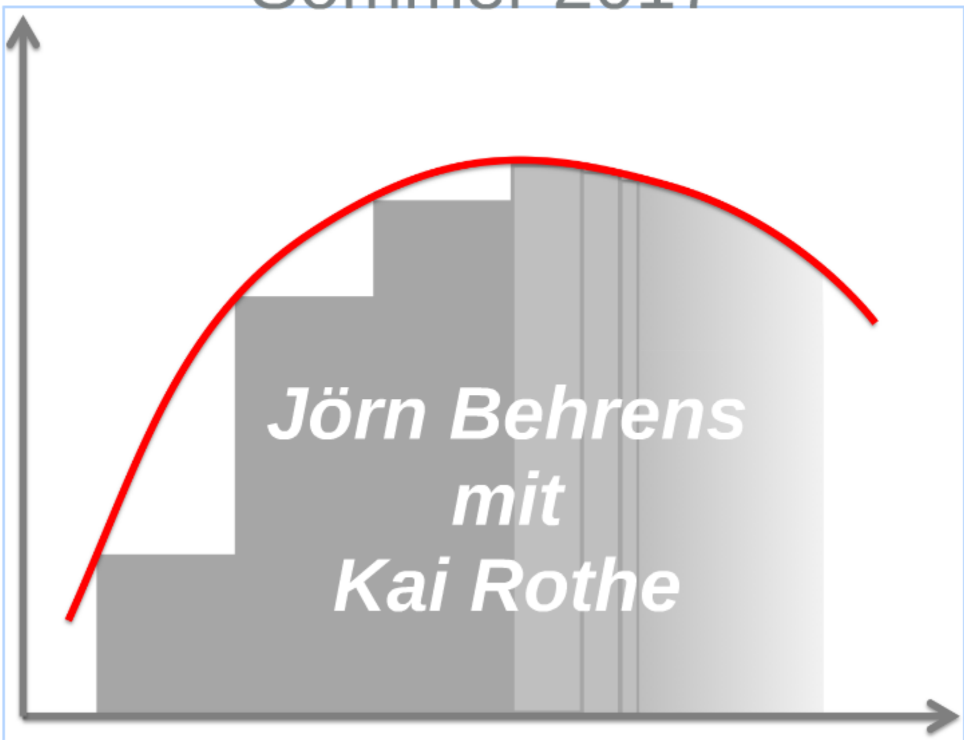
Analysis II

Sommer 2017



Potenzreihen

Buch Kapitel 3.4 bis 3.6

Erinnerung Funktionenreihen

Definition: (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Summe der Reihe (oder Summenfunktion).
Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ mit } x \in D.$$

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf D beschränkten Funktionen heißt gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

Bemerkung: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent, so folgt auch die gleichmäßige Konvergenz, denn es gilt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty,$$

wegen $\sup_{x\in D}(f+g) \leq \sup_{x\in D} f + \sup_{x\in D} g$.

Satz: (Gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Es gelte:

- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a,b]$ differenzierbarer Funktionen.
- Es existiere die Grenzsumme $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für wenigstens ein $x \in [a,b]$
- Die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ sei gleichmäßig konvergent in $[a,b]$.

Dann ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a,b]$.
Weiter ist die Summe $s(x)$ differenzierbar und $s'(x)$ kann durch gliedweises differenzieren berechnet werden.

$$s'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Satz: (Stetigkeit der Reihensumme)
Seien $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
Dann ist die Summe $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ebenfalls stetig in $[a,b]$.

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von f_k und s gemeint.

Satz: (Gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf $[a,b]$ integrierbaren Funktionen besitzt auf $[a,b]$ eine integrierbare Summenfunktion $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Definition: (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Summe der Reihe (oder Summenfunktion). Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ mit } x \in D.$$

Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf D beschränkten Funktionen heißt gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

Bemerkung: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent, so folgt auch die gleichmäßige Konvergenz, denn es gilt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty,$$

wegen $\sup_{x \in D}(f+g) \leq \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$.

Satz: (Stetigkeit der Reihensumme)
Seien $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
Dann ist die Summe $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ebenfalls stetig in $[a, b]$.

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von f_k und s gemeint.

Satz: (Gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Es gelte:

- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a, b]$ differenzierbarer Funktionen.
- Es existiere die Grenzsumme $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für wenigstens ein $x \in [a, b]$
- Die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ sei gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.

Dann ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.
Weiter ist die Summe $s(x)$ differenzierbar und $s'(x)$ kann durch gliedweises differenzieren berechnet werden:

$$s'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Satz: (Gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf $[a, b]$ integrierbaren Funktionen besitzt auf $[a, b]$ eine integrierbare Summenfunktion $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\ dx.$$

Potenzreihe

Definition: (Potenzreihe)
Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x, x_0 \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{R}.$$

Die Partialsummen dieser Reihe bilden Polynome $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$.
x_0 heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe, die a_k heißen Koeffizienten.

Satz: (Identitätssatz)
Seien $f(x) = \sum_{k_0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k_0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ zwei Potenzreihen, die beide in einem offenen Intervall I um x_0 konvergieren.
Falls $f(x_k) = g(x_k)$ für die Folge (x_k) mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, $x_k \neq x_0$, dann sind beide Potenzreihen identisch:

$$a_k = b_k \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle} x \in I.$$

Bemerkungen:

- Der Satz folgt aus dem Koeffizientenvergleich der Partialsummen:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \quad \Leftrightarrow \quad a_k = b_k\ \forall k = 0 : n.$$

- Satz heißt auch Unitätssatz oder Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen.
- Nach dem Satz kann eine Funktion $f(x)$ **eindeutig** durch eine Potenzreihe dargestellt werden (wenn überhaupt).
- Grundlage für Koeffizientenvergleich bei Potenzreihen: Falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[,\ 0 < \rho \in \mathbb{R},$$

so folgt $a_k = b_k$ für alle k.

s II

jenz
reihen

Definition: (Potenzreihe)
Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x, x_0 \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{R}.$$

Die Partialsummen dieser Reihe bilden Polynome $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$.
x_0 heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe, die a_k heißen Koeffizienten.

Satz: (Identitätssatz)
Seien $f(x) = \sum_{k_0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k_0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ zwei Potenzreihen, die beide in einem offenen Intervall I um x_0 konvergieren.
Falls $f(x_k) = g(x_k)$ für die Folge (x_k) mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, $x_k \neq x_0$, dann sind beide Potenzreihen identisch:

$$a_k = b_k \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle} x \in I.$$

Bemerkungen:

- Der Satz folgt aus dem Koeffizientenvergleich der Partialsummen:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \quad \Leftrightarrow \quad a_k = b_k \ \forall k = 0 : n.$$

- Satz heißt auch Unitätssatz oder Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen.
- Nach dem Satz kann eine Funktion $f(x)$ **eindeutig** durch eine Potenzreihe dargestellt werden (wenn überhaupt).
- Grundlage für Koeffizientenvergleich bei Potenzreihen: Falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[, \ 0 < \rho \in \mathbb{R},$$

so folgt $a_k = b_k$ für alle k.

$-(a-x_0)^{k-1}]$.

dargestellt werder

- Grundlage für Ko

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0$

so folgt $a_k = b_k$ f

Konvergenz von Potenzreihen

Satz: (Cauchy und Hadamard)
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Koeffizienten a_k und Entwicklungspunkt x_0 gibt es ein Konvergenzintervall $I =]x_0-\rho, x_0+\rho[$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert für $x \in I$ punktweise (absolut).
   Sie konvergiert gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von I.
2. Außerhalb von $[x_0-\rho, x_0+\rho]$ divergiert die Potenzreihe.

Bemerkungen:

- [illegible]
- [illegible] nirgends konvergent.
- [illegible] beständig konvergent.
- [illegible] Konvergenzradius [illegible] Potenzreihe.
- [illegible]

Bemerkung: (Limes superior)
Bezeichne mit $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ den größten Häufungspunkt (Limes superior) der Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$, so berechnet sich der Konvergenzradius immer mit

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

- Ist $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ($\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$), so ist die Potenzreihe nirgends konvergent.
- Ist $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, so ist die Reihe beständig konvergent.
- Hat die Folge nur einen Häufungspunkt, so gilt

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Und der Konvergenzradius wird berechnet wie im Satz.

Satz: (Konvergenzradius)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Falls

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c > 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0,$$

so ist der Konvergenzradius ρ der Reihe gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

1

Beispiel: Betrachte die Potenzreihe

$$x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{3}x^5 + \frac{27}{4}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}.$$

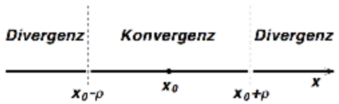
2

Satz: (Cauchy und Hadamard)
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Koeffizienten a_k und Entwicklungspunkt x_0 gibt es ein Konvergenzintervall $I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert für $x \in I$ punktweise (absolut).
   Sie konvergiert gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von I.

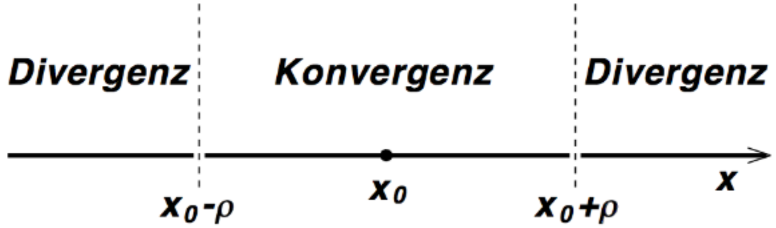
2. Außerhalb von $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ divergiert die Potenzreihe.

Bemerkungen:



- Möglich: $\rho = 0$ und $\rho = \infty$.
- Für $\rho = 0$ gilt $I = \emptyset$, allerdings konvergiert jede Potenzreihe für $x = x_0$. Trotzdem nennen wir die Potenzreihe in diesem Fall nirgends konvergent.
- Für $\rho = \infty$ bezeichnen wir die Potenzreihe als beständig konvergent.
- ρ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.
- Beweis durch konstruktive Berechnung von ρ (siehe nächsten Satz).

Bemerkungen:



- Möglich: $\rho = 0$ und $\rho = \infty$.
- Für $\rho = 0$ gilt $I = \emptyset$, allerdings konvergiert jede Potenzreihe für $x = x_0$. Trotzdem nennen wir die Potenzreihe in diesem Fall nirgends konvergent.
- Für $\rho = \infty$ bezeichnen wir die Potenzreihe als beständig konvergent.
- ρ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.
- Beweis durch konstruktive Berechnung von ρ (siehe nächsten Satz).

Satz: (Konvergenzradius)
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Falls

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c > 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0,$$

so ist der Konvergenzradius ρ der Reihe gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

1

Beispiel: Betrachte die Potenzreihe

$$x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{3}x^5 + \frac{27}{4}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}.$$

Bemerkung: (Limes superior)
Bezeichne mit $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ den größten Häufungspunkt (Limes superior) der Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$, so berechnet sich der Konvergenzradius immer mit

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

- Ist $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ($\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$), so ist die Potenzreihe nirgends konvergent.
- Ist $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, so ist die Reihe beständig konvergent.
- Hat die Folge nur einen Häufungspunkt, so gilt

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Und der Konvergenzradius wird berechnet wie im Satz.

Operationen mit Potenzreihen

Satz: (Konvergenz von Summe und Produkt von Potenzreihen)
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ zwei Potenzreihen. Dann gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

mit $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0$.

Beweis folgt aus Sätzen über gliedweise Addition und Cauchy-Produkt von Reihen

Bemerkungen.

- **Satz von Cauchy und Hadamard**: Potenzreihen konvergieren gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzbereiches.
- **Satz über Stetigkeit gleichmäßig Konvergenter Funktionenfolgen**: In diesen Teilintervallen sind Potenzreihen stetig.
- **Definition der Potenzreihen**: Die Teilsummen sind Polynome, daher differenzierbar und integrierbar.
- **Satz über gliedweise Differentiation und Integration**: Potenzreihen lassen sich gliedweise differenzieren und integrieren.

Satz: (Gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen)
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ Potenzreihe mit Summe $f(x)$ und Konvergenzradius $\rho > 0$ (Konvergenzintervall $I =]x_0-\rho, x_0+\rho[$.

1. Die Funktion $f(x)$ ist auf dem Konvergenzintervall I beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen berechnen sich durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe:
$$f'(X) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}.$$
2. $f(x)$ ist über jedes abgeschlossene Teilintervall $[a,b] \subset I$ integrierbar (da stetig). Das Integral kann durch gliedweise Integration der Potenzreihe berechnet werden:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}[(b-x_0)^{k+1} - (a-x_0)^{k+1}].$$

A

Kon
von Po

Satz: (Konvergenz von Summe und Produkt von Potenzreihen)
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ zwei Potenzreihen. Dann gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

mit $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$.

Beweis folgt aus Sätzen über gliedweise Addition und Cauchy-Produkt von Reihen

Bemerkungen:

- **Satz von Cauchy und Hadamard**: Potenzreihen konvergieren gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzbereiches.
- **Satz über Stetigkeit gleichmäßig Konvergenter Funktionenfolgen**: In diesen Teilintervallen sind Potenzreihen stetig.
- **Definition der Potenzreihen**: Die Teilsummen sind Polynome, daher differenzierbar und integrierbar.
- **Satz über gliedweise Differentiation und Integration**: Potenzreihen lassen sich gliedweise differenzieren und integrieren.

Satz: (Gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen)
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ Potenzreihe mit Summe $f(x)$ und Konvergenzradius $\rho > 0$ (Konvergenzintervall $I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

1. Die Funktion $f(x)$ ist auf dem Konvergenzintervall I beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen berechnen sich durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe:
$$f'(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}.$$

2. $f(x)$ ist über jedes abgeschlossene Teilintervall $[a,b] \subset I$ integrierbar (da stetig). Das Integral kann durch gliedweise Integration der Potenzreihe berechnet werden:
$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}[(b-x_0)^{k+1} - (a-x_0)^{k+1}].$$

Bemerkung: Die differenzierte bzw. integrierte Reihe hat jeweils denselben Konvergenzradius, wie die Reihe selbst.

Beispiel: es ist

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|ka_k|} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

denn

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|ka_k|} &= \sqrt[k]{k}\,\sqrt[k]{|a_k|} \\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} &= 1 \\ &\Rightarrow \quad \rho \text{ für} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} ka_k(x-x_0)^k \text{ gleich.} \end{aligned}$$

folgt mit dem Zwischenwertsatz auch die Surjektivität.

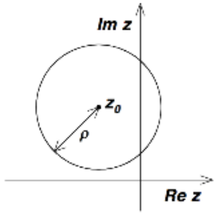
- Insgesamt ist $\exp$ also bijektiv.

Komplexe Potenzreihen

Beobachtung:
Ist

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

mit $a_k, z, t_0 \in \mathbb{C}$ komplexe Potenzreihe, dann charakterisiert der Konvergenzradius kein Intervall, sondern einen Konvergenzkreis um die komplexe Zahl z_0.



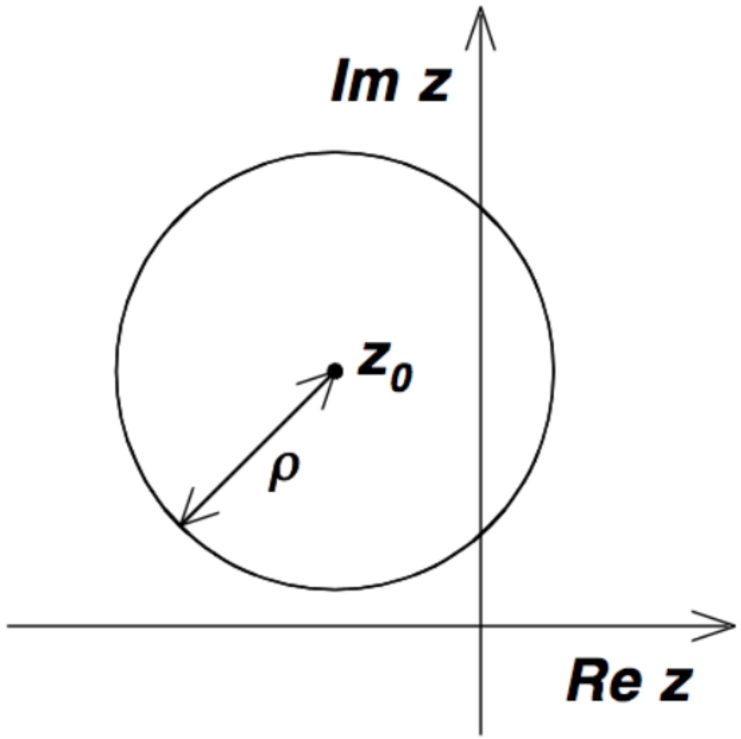
Bemerkungen: Alle Kriterien, in denen Beträge verwendet wurden, gelten auch im Komplexen:

- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius ρ
- Satz von Cauchy und Hadamard

Beobachtung:
Ist

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $a_k, z, t_0 \in \mathbb{C}$ komplexe Potenzreihe, dann charakterisiert der Konvergenzradius kein Intervall, sondern einen Konvergenzkreis um die komplexe Zahl z_0.



Bemerkungen: Alle Kriterien, in denen Beträge verwendet wurden, gelten auch im Komplexen:

- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius ρ
- Satz von Cauchy und Hadamard

Exponentialfunktion

Erinnerung: Die Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = a^x.$$

Aber die Berechnung beispielsweise von $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x = \sqrt{3}$ via Grenzwert ist unpraktisch.

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

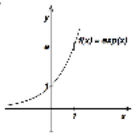
Bemerkungen:

- Die Definition ist sinnvoll, da man zeigt, dass $\rho = \infty$ für $\exp(x)$.
- Für $x = 0$ gilt offensichtlich $\exp(0) = 1$.
- Für $x > 0$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, also ist $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$.
- Nach Definition ist $\exp(x)$ auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend.

Eigenschaften der Exponentialfunktion:
Mit Hilfe des Additionstheorems findet man:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$.
- Es ist $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Dann folgt aus dem Additionstheorem:

$$\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$



- Also ist $\exp(x)$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
- Es gilt auch: $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.
- Aus der Monotonie folgt: $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist injektiv.
- Aus Konvergenz der Potenzreihe folgt Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Aus

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$$

folgt mit dem Zwischenwertsatz auch die Surjektivität.

- Insgesamt ist exp also bijektiv.

Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

3

exe
ihen

Erin
Funktio

Erinnerung: Die Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = a^x.$$

Aber die Berechnung beispielsweise von $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x = \sqrt{3}$ via Grenzwert ist unpraktisch.

Definition: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

heißt Exponentialfunktion.

Bemerkungen:

- Die Definition ist sinnvoll, da man zeigt, dass $\rho = \infty$ für $\exp(x)$.
- Für $x = 0$ gilt offensichtlich $\exp(0) = 1$.
- Für $x > 0$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, also ist $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.
- Nach Definition ist $\exp(x)$ auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend.

Satz: (Additionstheorem)
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt das Additionstheorem:

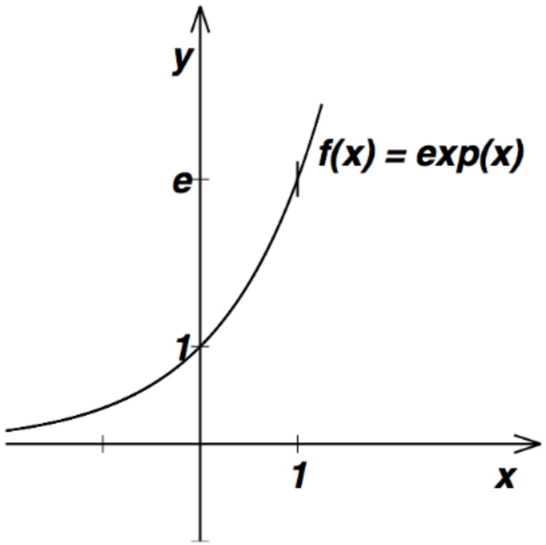
$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y).$$

3

Eigenschaften der Exponentialfunktion:
Mit Hilfe des Additionstheorems findet man:

- $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1.$
- Es ist $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Dann folgt aus dem Additionstheorem:

$$\exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$



- Also ist $\exp(x)$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
- Es gilt auch: $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
- Aus der Monotonie folgt: $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist injektiv.
- Aus Konvergenz der Potenzreihe folgt Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Aus

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$$

  folgt mit dem Zwischenwertsatz auch die Surjektivität.
- Insgesamt ist $\exp$ also bijektiv.

Exponentialfunktion

Komplexe Potenzreihen

Erinnerung Funktionenreihen

Operationen mit Potenzreihen

Potenzreihe

Analysis II

Konvergenz von Potenzreihen