Analysis II

J. Behrens

26.05.2017

① Beweis Konvergenzradius:

- Wir beschränken uns auf $\frac{1}{\rho} = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$
- Wir wenden das Quotientenkriterium für Reihen an
  - $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$: $a_k \neq 0$ für $k > k_0$
  - $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d$

  $\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $d < 1$, Divergenz für $d > 1$.
- Also: für $k > k_0$ (punktweise für beliebig. x)

$$\left| \frac{a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a_k \, (x-x_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x-x_0| \xrightarrow[k \to \infty]{} c \cdot |x-x_0|$$

- Nach dem Quotientenkriterium liegt Konvergenz vor, falls

$$c\,|x-x_0| < 1$$

$$\Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{c} = \rho \quad \text{bzw. } x \in \,]x_0-\rho, x_0+\rho[$$

- Nach Quotientenkriterium liegt Divergenz vor, falls

$$c|x-x_0| > 1$$

$\Rightarrow$ ρ ist Konvergenzradius

Damit auch Satz von Cauchy/Hadamard bewiesen. ☒

② Potenzreihe "mit Löchern": $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$ $\quad (x_0 = 0)$

- Problem: Berechnungsformel für Konvergenzradius nicht anwendbar!
- Aber: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k} = x \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} u^k}$$
mit $u = x^2$

- Berechne mit $\square$ ρ:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3^k}{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{3}$$

- Also konvergiert die Reihe für $|u| < \frac{1}{3}$ $\quad (u = x^2)$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$ konvergiert für $x^2 < \frac{1}{3}$ oder $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

③ Additionstheorem:

- Potenzreihen konvergieren glm. absolut, daher kann man multiplizieren; wende Cauchy-Produkt an:

- $$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,j!} x^{k-j} y^j$$

$$\overset{\text{Binomische Formel}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y) \quad \otimes$$