Analysis II

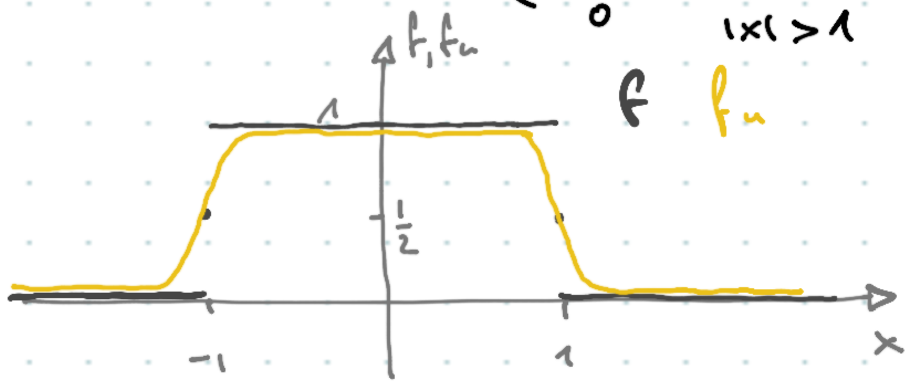
18.05.2017

J. Behrens

① Betrachte: $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$

- Wir wissen: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 1/2 & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

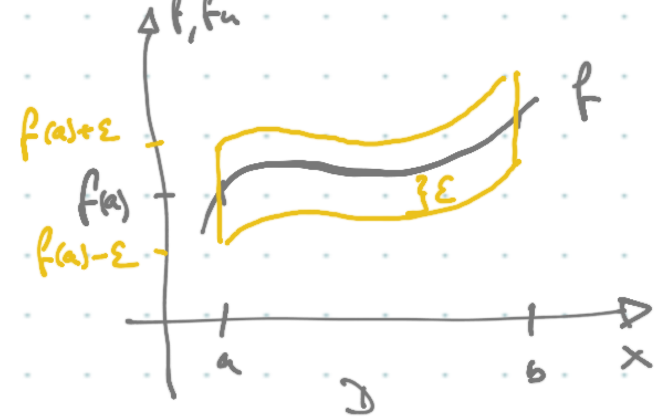


- Frage: ist (f_n) auch gleichmäßig konvergent?

Nein, denn $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$

oder $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$; denn $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2}$ $\forall n$

- graphisch: Alle f_n liegen innerhalb eines ε-"Schlauches" um f



- Gleichmäßige Konvergenz bezieht sich auf das Verhalten von Funktionen als "Ganzes" d.h. $\forall x \in D$.

② Stetige Grenzfunktion:

- (f_n) konvergiere glm. gegen f auf D. Zeige: $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x-x_0| < \delta$
- Es gilt $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$
- Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. **Ziel**: jeder Summand $< \frac{\varepsilon}{3}$

  Da $f_n \to f$ glm. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: für $n > n_0$: $|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

  und $|f(x_0)-f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad x, x_0 \in D$.
- Betrachte nun für $n \geq n_0$ $\quad f_n : D \to \mathbb{R}$: Da f_n stetig $\exists \delta > 0$:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ falls } |x-x_0| < \delta$$

- $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ für $|x-x_0| < \delta$.

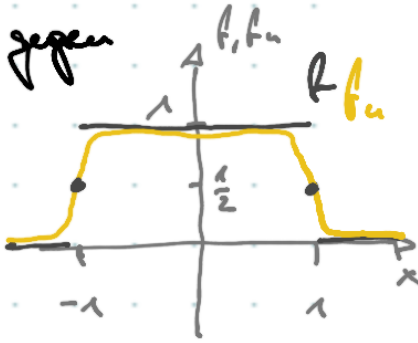
$\boxtimes$

Analysis II

19.05.2017

① Betrachte: $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$ $\quad n=0,1,\dots$

- Punktweise: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen

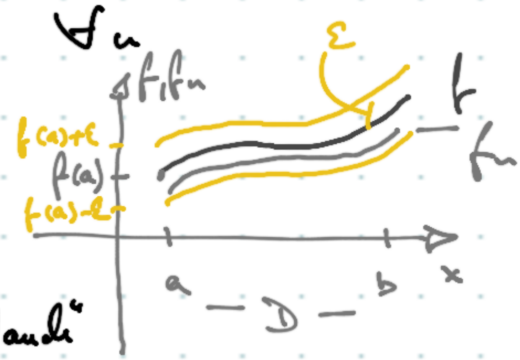


$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

- Aber keine gleichm. Konvergenz, denn

$\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$ oder $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$,

denn $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2}$ $\quad \forall n$



- Graphische Intuition:

Alle f_n $(n > n_0)$ liegen in „ε-Schlauch" um f.

- glm. Konvergenz bezieht sich auf die Funktionen „als Ganzes" d.h. $\forall x \in D$.

② stetige Grenzfunktion:

- (f_n) konvergiere glm. gegen f auf D, f_n stetig, dann zeige:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \qquad \text{für } |x-x_0|<\delta$$

- Es gilt: $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$
  $x, x_0 \in D$.
- Sei $\varepsilon>0$ beliebig, Ziel: jeder Summand $<\frac{\varepsilon}{3}$.

  Da $f_n \to f$ glm. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: für $n \geq n_0$:

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |f(x_0)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  für x, x_0 beliebig aus D.
- Betrachte also für $n \geq n_0$ $f_n: D \to \mathbb{R}$. Da f_n stetig n. Vor.

  $\exists \delta>0$: für $x \in D$ mit $|x-x_0|<\delta$

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$ für $|x-x_0|\leq\delta$ ⊠