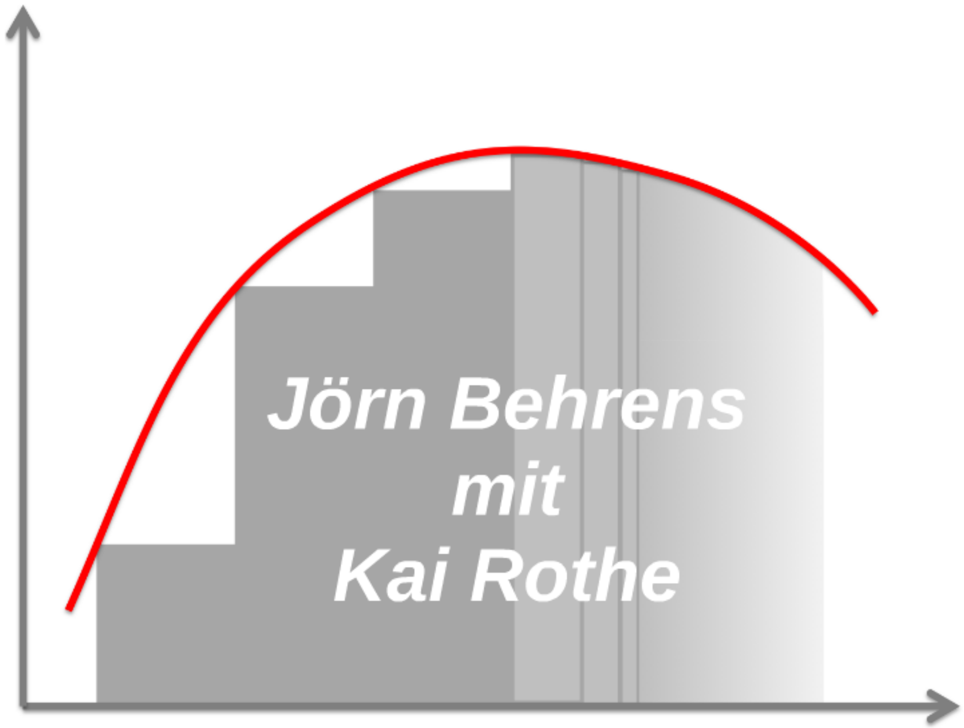
Analysis II

Sommer 2017



Rotationskörper, Parameterintegrale und uneigentliche Integrale

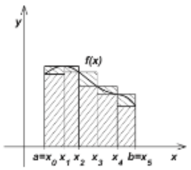
Buch Kapitel 2.14-2.16

Erinnerung

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme},$$
$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.



Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1:n$, so gilt $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

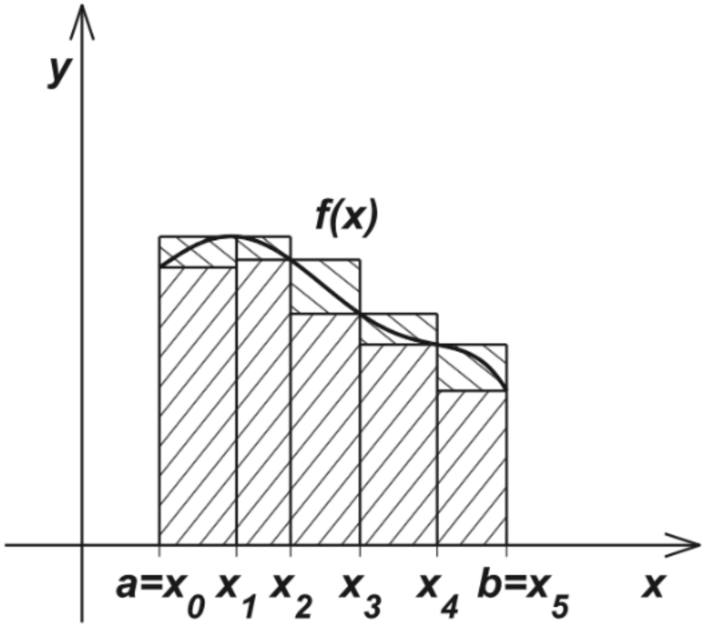
$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man



$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme},$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.

Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

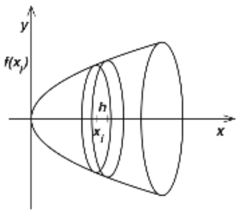
- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Rotationskörper

Definition (Rotationskörper):
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, stetig. Rotiert der Funktionsgraph $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ um die x-Achse, so entsteht ein durch die Funktion f erzeugter Rotationskörper.



Idee Volumenberechnung:

- Unterteile $[a, b]$ in n Teilintervalle (äquidistante Zerlegung):
$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \; x_i = a + ih, \; h = \frac{b-a}{n}.$$
- Berechne Volumen V_i der Scheibe/des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:
$$V_i \approx f^2(\xi_i)\pi h, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
- Das Gesamtvolumen V:
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\pi h.$$
- Dies ist die Riemannsche Summe von $\pi f^2(x)$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung.
- Führe den Grenzübergang $n \to \infty$ (also $h \to 0$) durch.

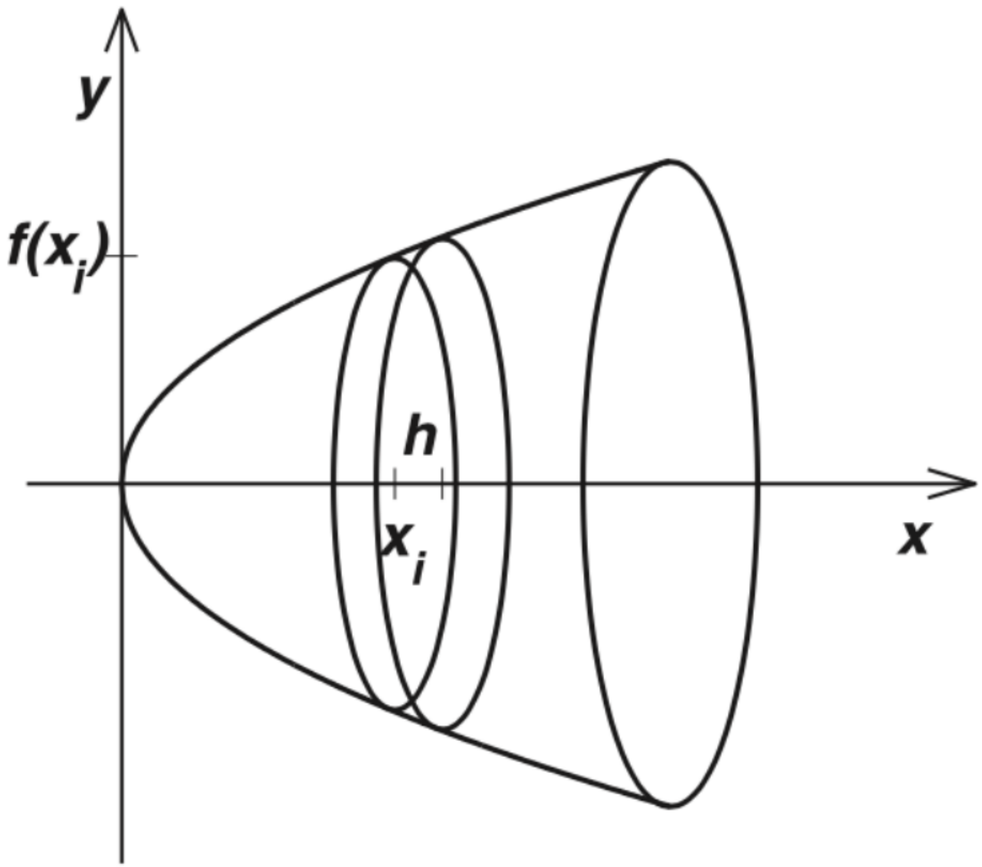
Volumen eines Rotationskörpers:
Das Volumen V eines von $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Idee Oberflächenberechnung:

- Verwenden äquidistante Zerlegung (wie bei Volumen)
$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \; x_i = a + ih, \; h = \frac{b-a}{n}.$$
- Berechne Oberfläche F_i des des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise
$$F_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
- Dabei ist Δs die Breite der Kegelstumpf Fläche (Pythagoras):
$$\Delta s = \sqrt{h^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$
- Die Gesamtoberfläche F:
$$F \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}\right)^2}\, h.$$
- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
- Führe den Grenzübergang $n \to \infty$ (also $h \to 0$) durch.

Oberfläche eines Rotationskörpers:
Die Oberfläche F eines von $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist
$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Definition (Rotationskörper):
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, stetig. Rotiert der Funktionsgraph $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ um die x-Achse, so entsteht ein durch die Funktion f erzeugter Rotationskörper.



Idee Volumenberechnung:

- Unterteile $[a, b]$ in n Teilintervalle (äquidistante Zerlegung):

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \ x_i = a + ih, \ h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Volumen V_i der Scheibe/des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$V_i \approx f^2(\xi_i)\pi h, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Das Gesamtvolumen V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\pi h.$$

- Dies ist die Riemannsche Summe von $\pi f^2(x)$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung.

- Führe den Grenzübergang $n \to \infty$ (also $h \to 0$) durch.

Volumen eines Rotationskörpers:
Das Volumen V eines von $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Idee Oberflächenberechnung:

- Verwenden äquidistante Zerlegung (wie bei Volumen)

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n,\ x_i = a + ih,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Oberfläche F_i des des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$F_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Dabei ist Δs die Breite der Kegelstumpf-Fläche (Pythagoras):

$$\Delta s = \sqrt{h^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

- Die Gesamtoberfläche F:

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}\right)^2}\, h.$$

- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
- Führe den Grenzübergang $n \to \infty$ (also $h \to 0$) durch.

Oberfläche eines Rotationskörpers:
Die Oberfläche F eines von $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Parameterintegrale

Beispiele/Motivation:
Die folgenden Funktionen sind als Integrale einer Funktion mit Parameter gegeben:

- Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0.$$

- Die Bessel-Funktionen:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$:

$$F(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-xt}\, dt.$$

Bemerke: Die unabhängige Veränderliche x ist ein Parameter des jeweiligen Integrals!

Bemerkungen:

- Integrationsgrenze ∞ wird nachfolgend noch behandelt.
- In vielen Fällen kann keine Stammfunktion angegeben werden.
- Frage: Gibt es dennoch Regeln für die Differentiation?

Falls im Parameterintegral die Integrationsgrenzen vom Parameter x abhängen, gilt
Satz: (Leibniz-Regel)
Es gelten die Voraussetzungen vom Satz über die Diff. von Parameterintegralen.
Außerdem seien $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x). \end{aligned}$$

Satz: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)
Seien $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x,y)$ in $[a,b] \times [c,d]$

- stetig bezüglich des Parameters x und
- integrierbar bezüglich der Veränderlichen y.

Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\, dy, \quad x \in [a,b]$$

1. $F(x)$ ist in $[a,b]$ stetig,
2. ist f zusätzlich auf $[a,b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x,y)\, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

Beispiele/Motivation:
Die folgenden Funktionen sind als Integrale einer Funktion mit Parameter gegeben:

- Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-t} e^{-t}\, dt, \quad x > 0.$$

- Die Bessel-Funktionen:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$:

$$F(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-xt}\, dt.$$

Bemerke: Die unabhängige Veränderliche x ist ein Parameter des jeweiligen Integrals!

Bemerkungen:

- Integrationsgrenze ∞ wird nachfolgend noch behandelt.
- In vielen Fällen kann keine Stammfunktion angegeben werden.
- Frage: Gibt es dennoch Regeln für die Differentiation?

Satz: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)
Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$

- stetig bezüglich des Parameters x und
- integrierbar bezüglich der Veränderlichen y.

Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad x \in [a, b]$$

1. $F(x)$ ist in $[a, b]$ stetig,
2. ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy.$$

2

Falls im Parameterintegral die Integrationsgrenzen vom Parameter x abhängen, gilt
Satz: (Leibniz-Regel)
Es gelten die Voraussetzungen vom Satz über die Diff. von Parameterintegralen. Außerdem seien $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy \\
&= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x).
\end{aligned}
$$

Oberfläc
Die Ober

Uneigentliche Integrale

Motivation:
Bei den bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ war vorausgesetzt:

- f beschränkt und
- a und b endlich.

Frage: Was passiert, wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist?

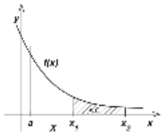
Satz: (Cauchy Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a,\infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar. Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

genau dann, wenn $\forall\epsilon > 0\ \exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.



Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a,b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a,c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a)}\quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\text{b)}\quad \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,

b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a,\infty[$.

Bemerkungen:

- Analog definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Die so definierten Integrale heißen uneigentliche Integrale
- Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, so konvergiert das uneigentliche Integral.

Motivation:
Bei den bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)\, dx$ war vorausgesetzt:

- f beschränkt und
- a und b endlich.

Frage: Was passiert, wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist?

3

Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\, dx$$

$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,

b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Bemerkungen:

- Analog definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Die so definierten Integrale heißen uneigentliche Integrale.
- Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, so konvergiert das uneigentliche Integral.

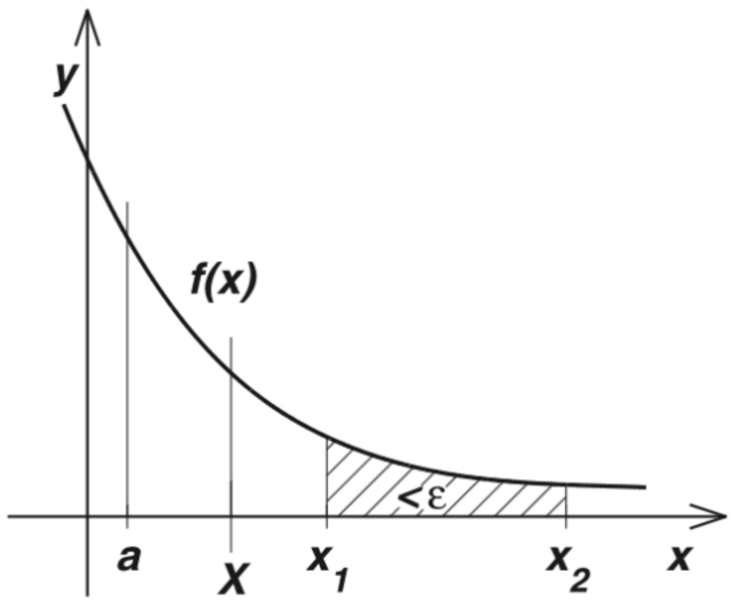
Satz: (Cauchy-Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar. Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\ dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

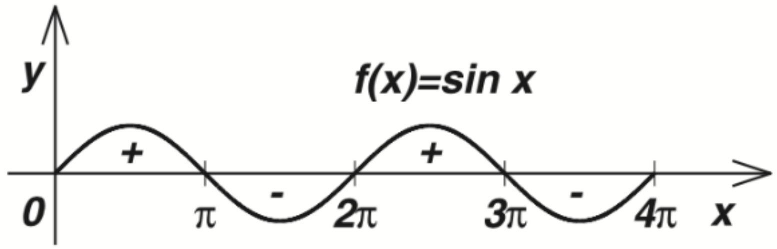
$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \right| < \epsilon.$$

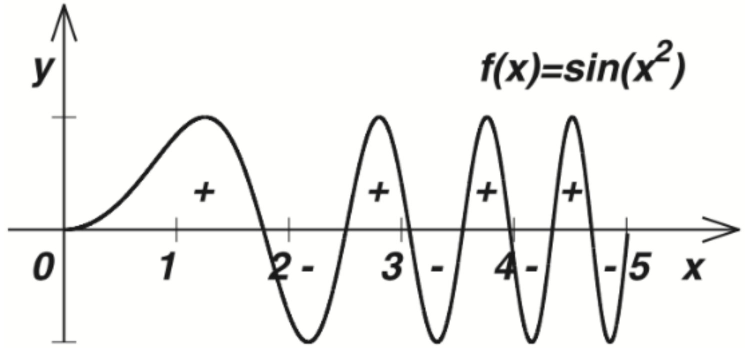
Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.



Beispiele: Betrachte

- $I_1 = \int_0^\infty \sin(x)\ dx$
- $I_2 = \int_0^\infty \sin(x^2)\ dx$



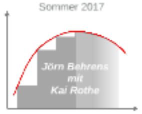


4

Erinnerung

Analysis II

Sommer 2017

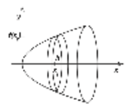


Rotationskörper, Parameterintegrale und uneigentliche Integrale

Buch Kapitel 2.14-2.16

Parameterintegrale

Rotationskörper



Uneigentliche Integrale