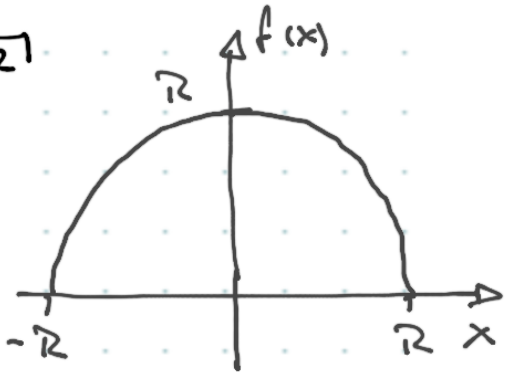
ANALYSIS II

J. Behrens

04.05.2017

① Beispiel: Volumen der Kugel mit Radius R

- Betrachte: $f(x) = R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}$
  $x \in [-R, R]$



- $V = \pi \int_{-R}^{R} f^2(x)\, dx$, also

$$V = \pi \int_{-R}^{R} R^2 \left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right) dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} 1-\left(\frac{x}{R}\right)^2 dx$$

- Stammfkt von $1-\left(\frac{x}{R}\right)^2$: $F(x) = x - \frac{x^3}{3R^2}$

- $$V = \pi R^2 \left(x - \frac{x^3}{3R^2}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi R^2 \left[R - \frac{R}{3} + R - \frac{R}{3}\right]$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

② Beweisskizze zu 2) Parameterintegral:

- Schreibe $F'(x)$ als Differenzenquotient

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_c^d \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \, dy$$

- Ziehe lim unter das Integral

$$\Rightarrow F'(x) = \int_c^d \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \, dy$$

<u>Beispiel</u>: Ableitung der Bessel-Fkt.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) \, dt$$

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \cdot \sin t \, dt$$

(3) Beispiel eines uneigentlichen Integrals : $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$

- $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$ ☹
- Allerdings : $\int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx$ ist definiert für beliebig kleines $\varepsilon > 0$
- Also betrachte :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-x\ln x + x\right]_\varepsilon^1$$

$$= 1 + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon\right]$$

- l'Hospital ergibt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \varepsilon - 1}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx = 1$$

Anderes Beispiel: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

- Auch hier : $\frac{1}{x^2} \to \infty$ für $x \to 0$
- Allerdings : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$

Ein drittes Beispiel : $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

- Hier : $\frac{1}{x^2} \leq 1$ in $[1,\infty[$
- Betrachte $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$
- $\Rightarrow \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^a = \underbrace{-\lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{a}}_{\to 0} - (-1) = 1$

④ Beispiele f. Cauchy Konvergenz-Kriterium:

* $I_1 = \int_0^\infty \sin x \, dx = ?$ divergiert!

- Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 2$

- Beh: Es gibt kein $X > 0$, so dass $\forall x_1, x_2 > X$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| < \varepsilon$$

- Gäbe es das, so gäbe insbesondere $k \in \mathbb{N}$:

$$x_1 = 2k\pi > X \quad \text{und} \quad x_2 = (2k+1)\pi > x_1 > X$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \right|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2 > \varepsilon \; ↯$$

* $I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$: Hoffnung: da immer kleinere Flächen $\rightarrow$ Konvergenz.

Zeige: Zu $\varepsilon > 0 \;\; \exists X > 0$: für $x_2 > x_1 > X$: $\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 dx \right| < \varepsilon$

- Substitution $x^2 = t$: $\int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$

- Partielle Integration : $\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = - \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_{x_1^2}^{x_2^2} - \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}^3} dt$

- Da $|\cos t| \leq 1$:

$$\left|\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right| \le \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2}\int_{x_1^2}^{x_2^2} t^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_1}$$

- Resubstitution

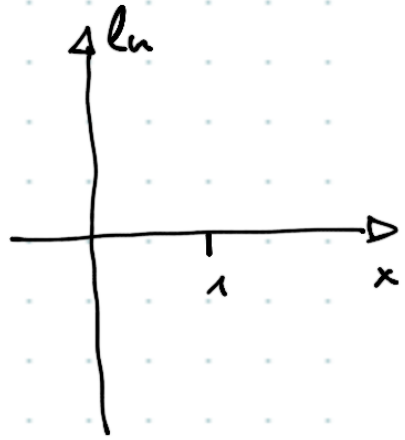
$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\sin x^2\,dx\right| \le \frac{1}{x_1} < \varepsilon \quad \forall\; x_2 > x_1 > X = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow \int_1^\infty \sin x^2\,dx$ konvergiert.

<u>Bem:</u> $I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

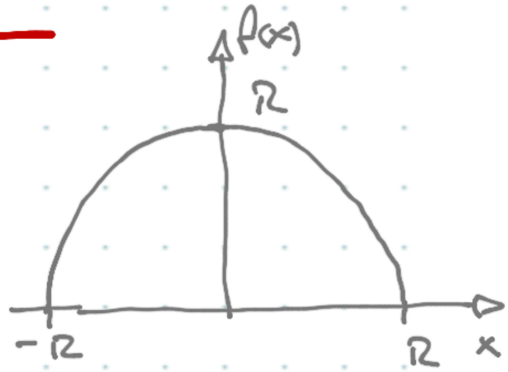
③ Beispiele f. uneigentliche Integrale

1. Beispiel: $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$



Analysis II

05.05.2017



① Berechnung des Volumens einer Kugel

- Betrachte $f(x) = R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\,,\ x \in [-R,R]$
- $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ also konkret

$$V = \pi \int_{-R}^{R} R^2\left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)dx$$

$$= \pi R^2 \int_{-R}^{R} \underbrace{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}_{\text{Stammfkt: } x - \frac{x^3}{3R^2}} dx$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 \left(x - \frac{x^3}{3R^2}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi R^2\left[R - \frac{R}{3} + R - \frac{R}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

② Beweisskizze Parameterintegrale:

- $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to\infty} \int_c^d \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\, dy$

- Über die Def. des Integrals via Riemann-Summe überlegt man sich, dass der lim unter das Integral gezogen werden kann.

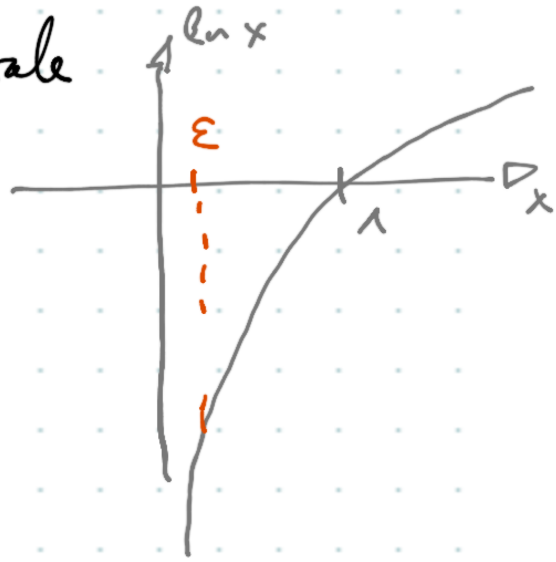
$$\Rightarrow F'(x) = \int_c^d \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x)}{h}\, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy$$

Beispiel: Ableitung der Bessel-Fkt.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt)\, dt$$

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin t - nt)\cdot \sin t \; dt$$

③ Beispiele f. uneigentliche Integrale



1. Beispiel: $\int_0^1 (-\ln x)\, dx$

$\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$

Allerdings $\int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx$ ist für ε beliebig klein definiert.

Also betrachte $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[-x\ln x + x\Big]_\varepsilon^1$$

$$= 1 + \lim_{\varepsilon \to 0} \big[\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon\big]$$

l'Hospital ergibt: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln \varepsilon - 1}{1/\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx = 1.$$

2. Beispiel: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

Auch hier: $\dfrac{1}{x^2} \to \infty$ für $x \to 0$

Allerdings $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Big[-\frac{1}{x}\Big]\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$

3. Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$.

Betrachte $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\, dx$

Erhalte $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\, dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\underbrace{\lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{a}}_{\to 0} - (-1) = 1$

④ Beispiel Cauchy-Kriterium:

$I_1 = \int_0^\infty \sin x \, dx$ divergiert

- Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 2$, Annahme, Cauchy lässt sich erfüllen
- Es gibt $X > 0$, so dass $x_2 > x_1 > X$ und
  $\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| < \varepsilon$
- Es gäbe dann auch $k \in \mathbb{N}$: $x_1 = 2k\pi > X$ und
  $x_2 = (2k+1)\pi > x_1 > X$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| = -\cos \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2 > \varepsilon \quad \lightning$$

$I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$

Zeige: Zu $\varepsilon > 0$ $\exists X > 0$: $x_2 > x_1 > X$ $\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 \, dx \right| < \varepsilon$.

Substitution $x^2 = t$: $\int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \, dt$

Partielle Integration: $\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_{x_1^2}^{x_2^2} - \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}^3} \, dt$

Da $|\cos| \leq 1$:

$$\left| \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt \right| \leq \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} t^{-\frac{3}{2}} \, dt = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_1}$$

Rücksubstitution:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)\,dx\right| \le \frac{1}{x_1} < \varepsilon \quad \text{für alle } x_2 > x_1 > X = \frac{1}{\varepsilon}$$

Man kann zeigen: $\quad I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.