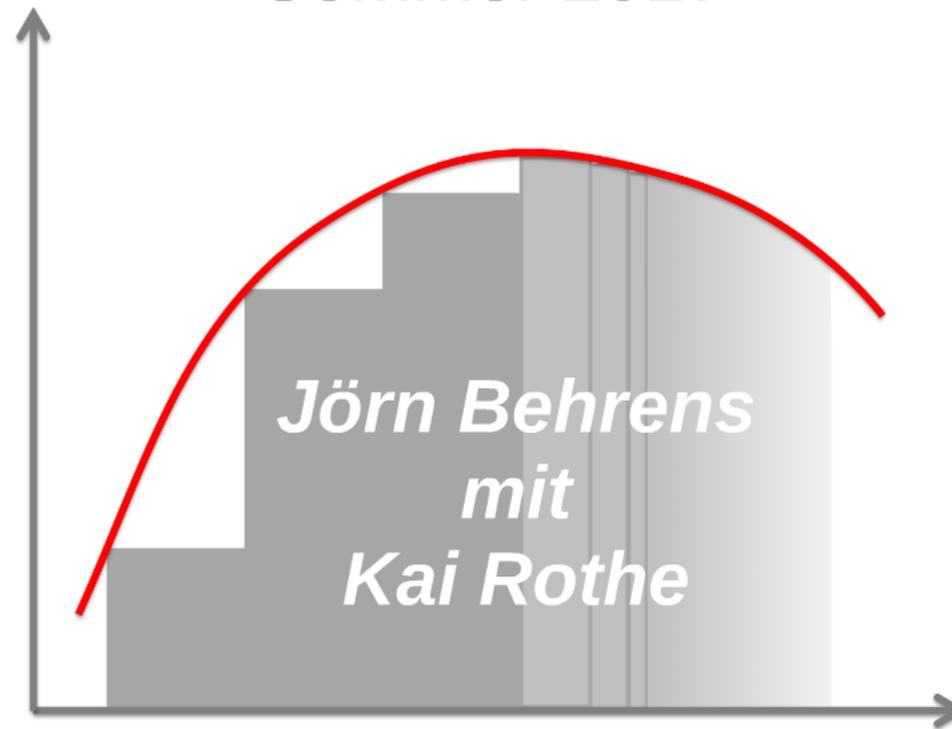


# Analysis II

Sommer 2017



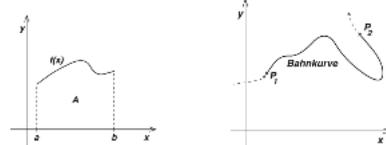
Bestimmtes Integral – Riemann Integral

Buch Kapitel 2.13

# Motivation Flächeninhalt

## In 1. Vorlesung:

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlangen



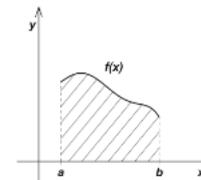
### Fläche:

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine auf  $[a, b] \in \mathbb{R}$  positive, beschränkte Funktion.  
Die **Fläche** von  $f$  auf  $[a, b]$  besteht aus den Punkten

$$(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x).$$

**Ziel:** Bestimme den Flächeninhalt!

**Annahme:** Flächeninhalt eines Rechtecks  $R = L \cdot B$  ( $L$  Länge,  $B$  Breite).



### Flächeninhalt:

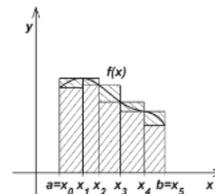
**Idee:** Unterteile die Fläche in Streifen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

mit Intervallen  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1 : n$ , der Breite  $\Delta x_i$ .

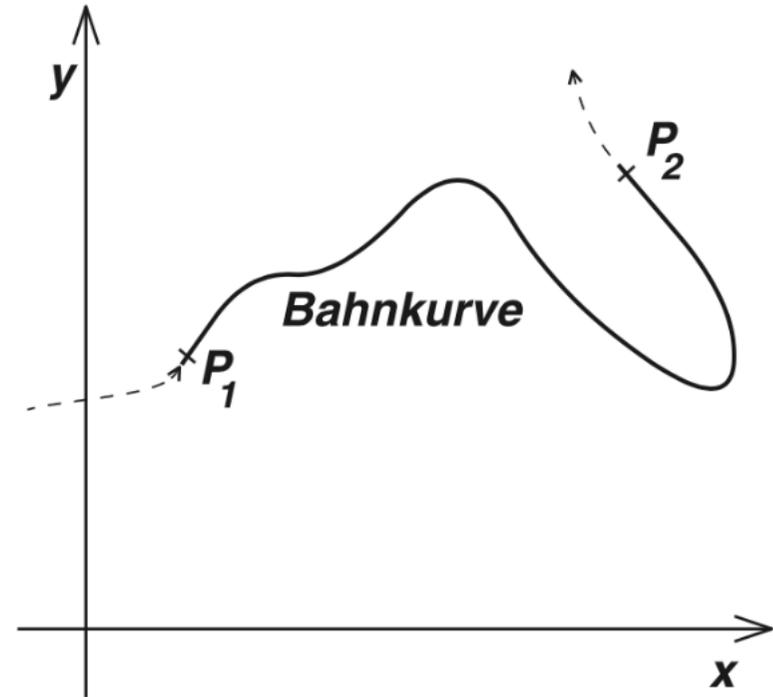
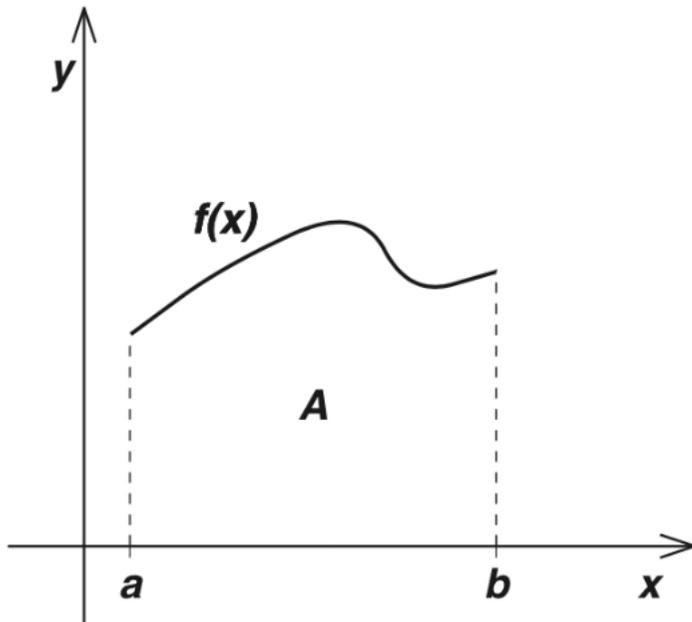
Die Menge der Intervalle heißt **Zerlegung**  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$ .

Die größte Teilintervalllänge  $|Z| = \max_{i=1:n} \Delta x_i$  heißt **Feinheit** von  $Z$ .



# In 1. Vorlesung:

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen



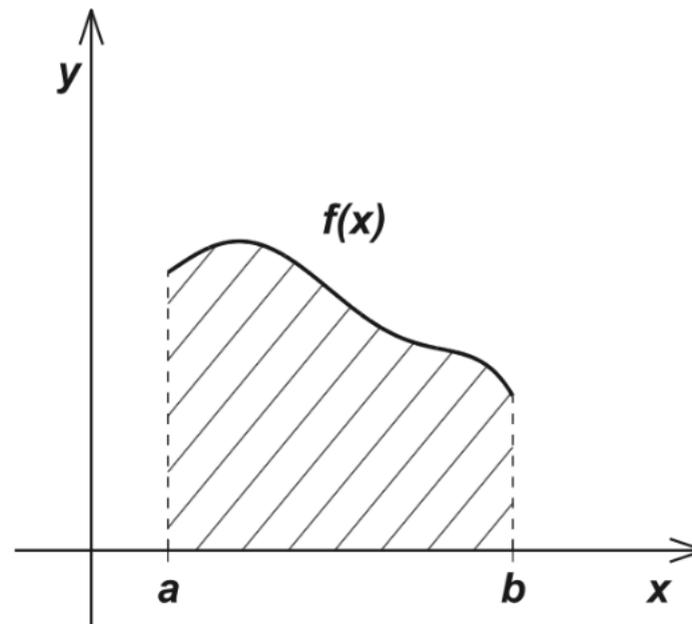
## Fläche:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine auf  $[a, b] \in \mathbb{R}$  positive, beschränkte Funktion.  
Die **Fläche** von  $f$  auf  $[a, b]$  besteht aus den Punkten

$$(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x).$$

**Ziel:** Bestimme den Flächeninhalt!

**Annahme:** Flächeninhalt eines Rechtecks  $R = L \cdot B$  ( $L$  Länge,  $B$  Breite).



## Flächeninhalt:

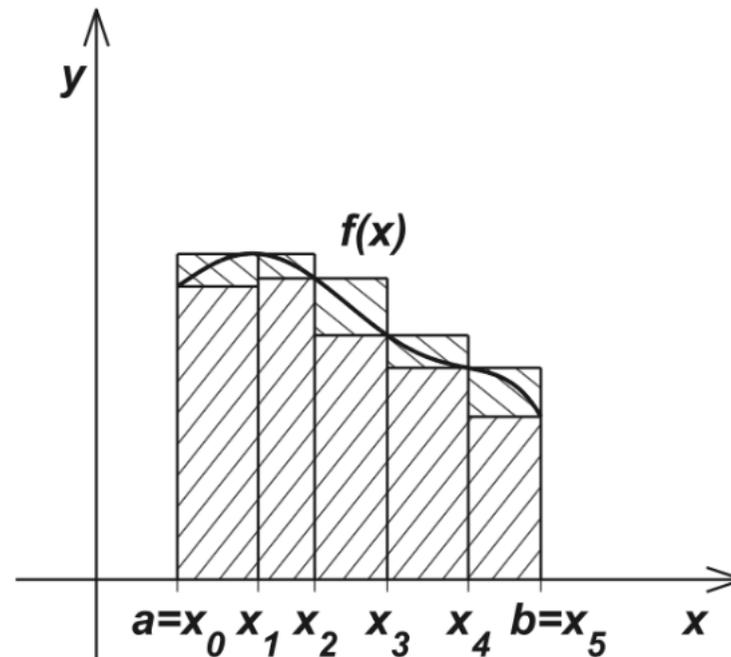
Idee: Unterteile die Fläche in Streifen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

mit Intervallen  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1 : n$ , der Breite  $\Delta x_i$ .

Die Menge der Intervalle heißt **Zerlegung**  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$ .

Die größte Teilintervalllänge  $|Z| = \max_{i=1:n} \Delta x_i$  heißt **Feinheit** von  $Z$ .



# Riemann Summe

## Obersumme/Untersumme:

Sei  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  und  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .  
Dann bildet man über  $[x_{i-1}, x_i]$  oberes bzw. unteres Rechteck  
mit Flächeninhalten  $\Delta x_i \cdot M_i$  bzw.  $\Delta x_i \cdot m_i$ .  
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

## Bemerkung:

Die Menge der Obersummen ist nach unten,  
die Menge der Untersummen nach oben beschränkt.

Denn: Sind  $Z_1$  und  $Z_2$  beliebige unterschiedliche Zerlegungen, dann ist  
 $Z$  die Menge aller Durchschnitte der Teilintervalle eine verfeinerte Zerlegung.

Es gilt offensichtlich:

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2),$$

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1).$$

Insbesondere ist für beliebige  $Z_1, Z_2$

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1).$$

Es folgt:  $\bar{I}_f$  und  $\underline{I}_f$  existieren mit

$$\underline{I}_f \leq \bar{I}_f.$$

## Riemannsche Summe:

Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig im Intervall,  $i = 1 : n$ , so gilt  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ .

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

Es gilt:  $s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z)$ .

## Oberintegral/Oberintegral:

Für feiner werdende Zerlegungen  $Z$  ist klar, dass die Obersumme kleiner und die  
Untersumme größer wird.

Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$

$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

## Obersumme/Untersumme:

Sei  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  und  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .

Dann bildet man über  $[x_{i-1}, x_i]$  oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten  $\Delta x_i \cdot M_i$  bzw.  $\Delta x_i \cdot m_i$ .

Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

## Riemannsche Summe:

Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig im Intervall,  $i = 1 : n$ , so gilt  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ .

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

Es gilt:  $s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z)$ .

## **Oberintegral/Oberintegral:**

Für feiner werdende Zerlegungen  $Z$  ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.

Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$

$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

**Bemerkung:**

Die Menge der Obersummen ist nach unten,  
die Menge der Untersummen nach oben beschränkt.

**Denn:** Sind  $Z_1$  und  $Z_2$  beliebige unterschiedliche Zerlegungen, dann ist  $Z$  die Menge aller Durchschnitte der Teilintervalle eine verfeinerte Zerlegung.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} s_f(Z_1) &\leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2), \\ s_f(Z_2) &\leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1). \end{aligned}$$

Insbesondere ist für beliebige  $Z_1, Z_2$

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1).$$

**Es folgt:**  $\bar{I}_f$  und  $\underline{I}_f$  existieren mit

$$\underline{I}_f \leq \bar{I}_f.$$

# Riemann Integral

**Bemerkung:** Für  $f$  stetig (und viele andere übliche Funktionen) gilt

$$\underline{I}_f = \bar{I}_f$$

**Ausgezeichnete/zulässige Zerlegungsfolge:**  
Ist  $(Z_k)$  eine Zerlegungsfolge für die gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Z_k| = 0$$

d.h.  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$  heißt **ausgezeichnete oder zulässige Zerlegungsfolge**.

Falls  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$  so folgt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_f(Z_k) = I_f = \lim_{k \rightarrow \infty} R(Z_k) = \bar{I}_f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_f(Z_k).$$

**Satz:** (Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion.  
Dann ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn jede Folge Riemannscher Summen  $R(Z_k)$  von  $f$  gegen denselben Grenzwert konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dabei gelte für die zugehörigen Zerlegungen  $Z_k: |Z_k| \rightarrow 0$ , und  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig.

1

**Bemerkung:** Für stetige Funktionen zeigt man:  
Jede Folge Riemannscher Summen konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Daher gilt **Satz:** (Stetigkeit  $\Rightarrow$  Integrierbarkeit)  
Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.  
Use gilt auch für **stetige Funktionen**, die auf  $[a, b]$  stetig sind mit Ausnahmepunkten.

- Höcker oder Sprünge erlauben, oder
- Diskontinuitäten 1. Art (Sprünge) erlauben.

**Definition:** (Riemannsches Integral)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion. Dann heißt  $f$  **Riemann-integrierbar**, falls  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ .

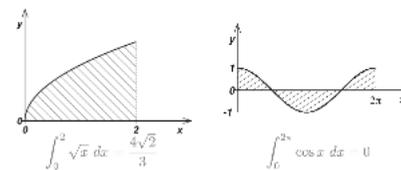
Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von  $f$  über  $[a, b]$  genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- $a$  heißt untere,  $b$  obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$  heißt **Integrationsintervall**,
- $x$  heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$  heißt **Integrand**.

**Bemerkung:**

Es ist nicht notwendig  $f(x) > 0$ , denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden.  
Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist die Fläche zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse.



**Bemerkung:** Für  $f$  stetig (und viele andere übliche Funktionen) gilt

$$\underline{I}_f = \bar{I}_f$$

**Ausgezeichnete/zulässige Zerlegungsfolge:**

Ist  $(Z_k)$  eine Zerlegungsfolge für die gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Z_k| = 0$$

d.h.  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$  heißt **ausgezeichnete** oder **zulässige Zerlegungsfolge**.

Falls  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$  so folgt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_f(Z_k) = \underline{I}_f = \lim_{k \rightarrow \infty} R(Z_k) = \bar{I}_f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_f(Z_k).$$

**Definition:** (Riemannsches Integral)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion. Dann heißt  $f$  **Riemann-integrierbar**, falls  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ .

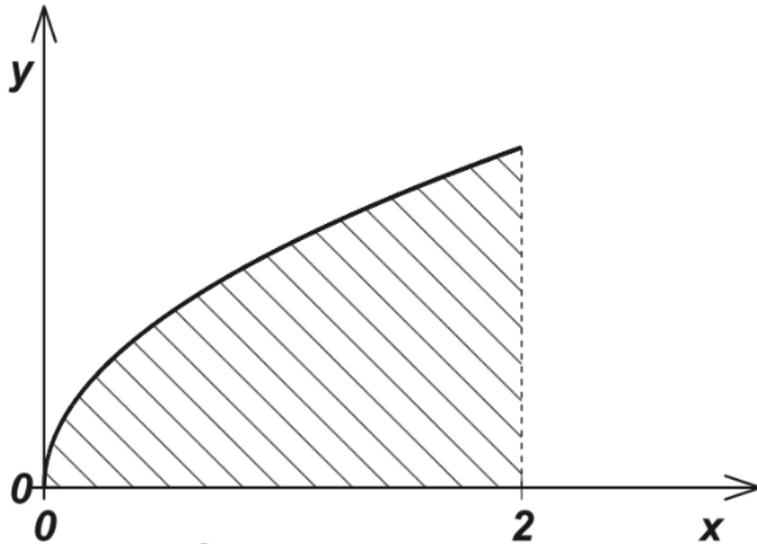
Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von  $f$  über  $[a, b]$  genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

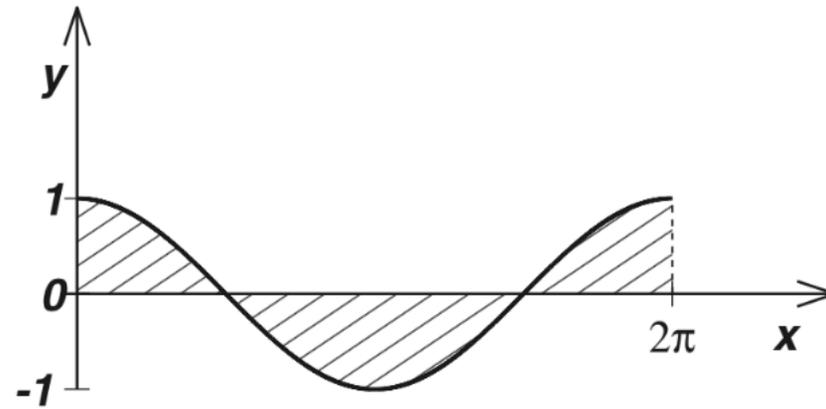
- $a$  heißt untere,  $b$  obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$  heißt **Integrationsintervall**,
- $x$  heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$  heißt **Integrand**.

**Bemerkung:**

Es ist nicht notwendig  $f(x) > 0$ , denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden. Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist die Fläche zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse.



$$\int_0^2 \sqrt{x} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$$

**Satz:** (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion.

Dann ist  $f$  genau dann integrierbar, wenn jede Folge Riemannscher Summen  $R(Z_k)$  von  $f$  gegen denselben Grenzwert konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dabei gelte für die zugehörigen Zerlegungen  $Z_k$ :  $|Z_k| \rightarrow 0$ , und  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig.

1

**Bemerkung:** Für stetige Funktionen zeigt man:

Jede Folge Riemannscher Summen konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Daher gilt **Satz:** (Stetigkeit  $\Rightarrow$  Integrierbarkeit)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar.

Das gilt auch für **stückweise stetige Funktionen**, die auf  $[a, b]$  stetig sind mit Ausnahme endlich vieler

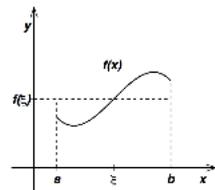
- hebbarer Unstetigkeitsstellen, oder
- Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen).

# Mittelwertsätze und Rechenregeln

**Satz:** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$



**Korollar:** (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Dann existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Satz:** (Rechenregeln für bestimmte Integrale)

Seien  $f$  und  $g$  integrierbare Funktionen auf  $[a, b]$ ,  $a < c < b$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

• Linearität:

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) dx = c_1 \int_a^b f dx + c_2 \int_a^b g dx.$$

• Betrag:

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

• Teilintervalle:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

• Positivität:

$$f > 0 \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f dx > 0.$$

• Null: ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und nichtnegativ, sowie

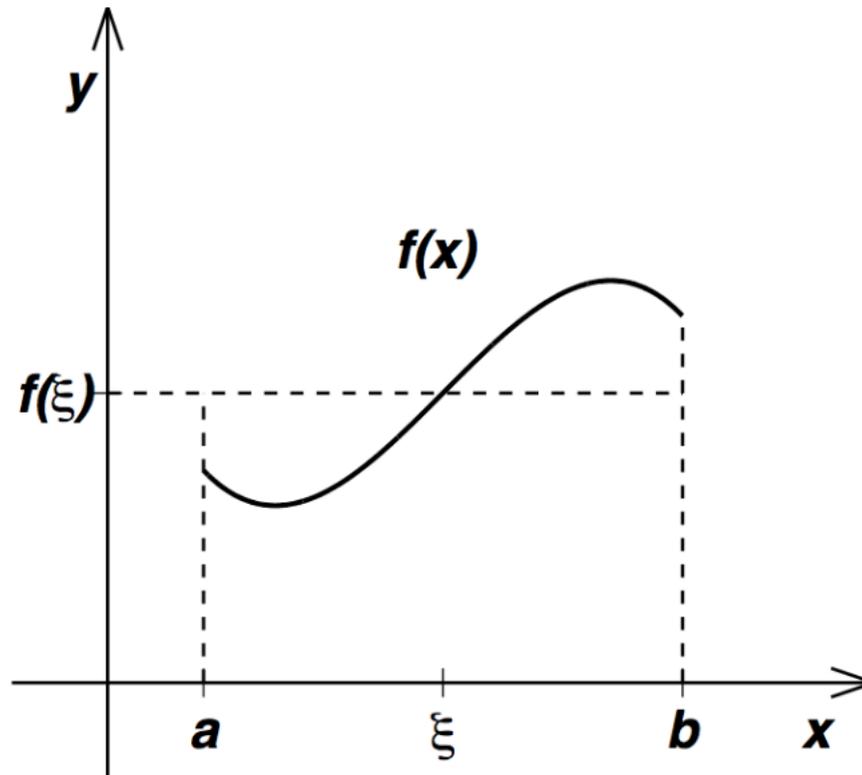
$$\int_a^b f dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

**Satz:** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

2



**Korollar:** (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

Dann existiert  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx.$$

**Satz:** (Rechenregeln für bestimmte Integrale)

Seien  $f$  und  $g$  integrierbare Funktionen auf  $[a, b]$ ,  $a < c < b$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

- Linearität:

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) dx = c_1 \int_a^b f dx + c_2 \int_a^b g dx.$$

- Betrag:

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

- Teilintervalle:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

- Positivität:

$$f \geq 0 \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f dx \geq 0.$$

- Null: ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und nichtnegativ, sowie

$$\int_a^b f dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

# Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

**Satz:** (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  stetig, dann ist die Funktion  $F$ , gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

mit  $x, a \in I$  eine Stammfunktion von  $f$ .

3

**Satz:** (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $F$  Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$ .

Dann gilt für beliebige  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

**Satz:** (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$  stetig, dann ist die Funktion  $F$ , gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

mit  $x, a \in I$  eine Stammfunktion von  $f$ .

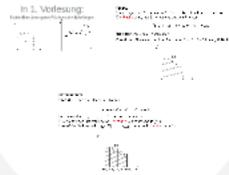
**Satz:** (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $F$  Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$ .

Dann gilt für beliebige  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

## Motivation Flächeninhalt



## Riemann Summe

**Definition:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $x_0 = a, x_n = b$ . Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ein Stützpunkt. Die Riemannsumme von  $f$  über  $\mathcal{Z}$  mit Stützpunkten  $\xi_i$  ist definiert durch

$$R(f, \mathcal{Z}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$

**Satz (Riemannsche Summenformel):** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann gilt

$$R(f, \mathcal{Z}, \xi) = \int_a^b f(x) dx + o(\|\mathcal{Z}\|)$$

falls  $f$  in  $[a, b]$  Riemann-integrierbar ist.

## Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

**Satz (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

**Satz (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$F'(x) = f(x)$$

## Mittelwertsätze und Rechenregeln

**Satz (Mittelwertsatz):** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$F(b) - F(a) = f(\xi) (b - a)$$

für ein  $\xi \in (a, b)$ .

**Satz (Rechenregeln):** Sei  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Sei  $F, G$  Stammfunktionen von  $f, g$ . Dann gilt

$$\int (f + g)(x) dx = F(x) + G(x) + C$$
$$\int (c \cdot f)(x) dx = c \cdot F(x) + C$$
$$\int (f \cdot g)(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx + C$$

## Riemann Integral

**Definition:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ein Stützpunkt. Die Riemannsumme von  $f$  über  $\mathcal{Z}$  mit Stützpunkten  $\xi_i$  ist definiert durch

$$R(f, \mathcal{Z}, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$

**Satz (Riemannsche Summenformel):** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sei  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann gilt

$$R(f, \mathcal{Z}, \xi) = \int_a^b f(x) dx + o(\|\mathcal{Z}\|)$$

falls  $f$  in  $[a, b]$  Riemann-integrierbar ist.