Analysis II

J. Behrens

27.04.2017

① Beweis des Integrationskriteriums

- Betrachte Zerlegung Z_k

  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$

- $\omega_i := M_i - m_i \geq 0$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

  $m_i = \inf\limits_{\cdot\cdot} \ \cdot\cdot$

- Stetigkeit auf $[a,b]$ (gleichm. stetig)

  Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\omega_i < \varepsilon$ für $\Delta x_i < \delta$

- Für Zerlegung Z_k mit $|Z_k| < \delta$ folgt:

  $$0 \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j < \sum_j \varepsilon \Delta x_j = \varepsilon \sum_j \Delta x_j = \varepsilon (b-a)$$

- Da ε beliebig klein, folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \omega_j \Delta x_j = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_j (M_i - m_i) \Delta x_j\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(S_f(Z_k) - s_f(Z_k)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) = \lim_{k\to\infty} s_f(Z_k)$$

- Wegen der Ungleichungen oben $s_f(Z_k) \le s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_k)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) = \lim_k s_f(Z_k) = \lim_k R(Z_k).$$

- Dies gilt für jede Folge Z_k (mit $|Z_k| \to 0$), daher ist der gemeinsame Grenzwert gerade

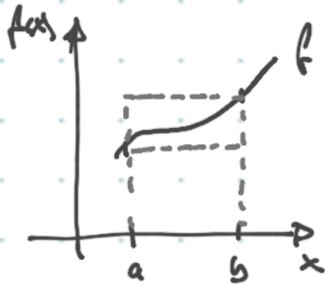
$$\lim_k R(Z_k) = \int_a^b f(x)\, dx$$

- Es reicht: stückweise stetig Funktionen: Führe die Betrachtung auf jedem stetigen Stück durch. $\boxtimes$

<u>Bem</u>: Stückweise Stetigkeit ist hinreichende aber nicht notwendige Bedingung!

② Beweis Mittelwertsatz:

- Berechne $\qquad c = \int_a^b f(x)\,dx \;/\; b-a$



- Es gilt: $\quad \min_{x \in [a,b]} f(x) \le c \le \max_{x \in [a,b]} f(x)$

- Zwischenwertsatz für stetig Fktn.

$$\exists\, \xi \in [a,b] : \quad c = f(\xi)$$

- ξ lässt sich immer aus $]a,b[$ wählen: Sei $\xi = a$

dann ist f entweder

a) konstant $\Rightarrow$ ich kann auch z.B. $\xi = \frac{a+b}{2}$ wählen

b) nicht konstant $\Rightarrow$ wegen Stetigkeit $\exists\, \eta, \gamma \in\,]a,b[$:

$$f(\eta) > f(a) > f(\gamma)$$

$\Rightarrow$ zwischen η und γ ex ξ so dass der Satz erfüllt ist.

$\boxtimes$

③ Beweis erster Hauptsatz:

- Betrachte Differenzenquotient

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

- Mittelwertsatz: $\exists\ \xi \in\ ]x, x+h[\ :$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

- Grenzübergang $h \to 0 \Rightarrow F'(x) = f(x)$

  also ist F Stammfunktion von f. $\boxtimes$

Analysis II

28.04.2017

① Beweis Kriterium f. Stetigkeit:

- Betrachte Z_k : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$
- Sei $\omega_i = M_i - m_i \geq 0$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

  $m_i = \inf\limits_{\dots} \dots$
- Stetigkeit auf $[a,b]$ (gleichm. stetig):

  Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\omega_i < \varepsilon$ für $\Delta x_i < \delta$
- Für die Zerlegung Z_k mit $|Z_k| < \delta$ folgt:

  $$0 \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j \Delta x_j < \sum_j \varepsilon \Delta x_j = \varepsilon \sum_j \Delta x_j = \varepsilon (b-a)$$
- Da ε beliebig klein, folgt:

  $$\lim_{k\to\infty} \sum_j \omega_j \Delta x_j = \lim_{k\to\infty} \sum_j (M_j - m_j) \Delta x_j = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) - s_f(Z_k) = 0$$

  $$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) = \lim_{k\to\infty} s_f(Z_k)$$

- Wegen der Ungleichungen oben $[s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2)]$ ...

$$\Rightarrow \lim_k S_f(Z_k) = \lim_k s_f(Z_k) = \lim_k R(Z_k)$$

- Dies gilt für alle Z_k (mit $|Z_k| \to 0$) ist der gemeinsame Grenzwert:

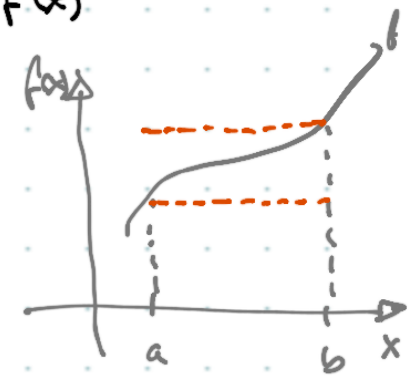
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Stückweise stetig: Führe Betrachtung auf jedem Stück aus. ☒

<u>Bem:</u> (Stückweise) Stetigkeit ist hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für Integrierbarkeit!

(2) Beweis Mittelwertsatz:

- Berechne: $c = \int_a^b f(x)\,dx \,/\, (b-a)$
- Es gilt $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le c \le \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$



- Zwischenwertsatz f. stetige Fktn.

  $\exists\, \xi \in [a;b] : \; c = f(\xi)$

- Bleibt zz. ξ immer auch in $]a,b[$ zu finden ist:

  Falls $\xi = a$, dann ist f entweder

  - konstant, aber dann wähle $\xi = \frac{a+b}{2}$
  - oder f ist nicht konstant, dann $\exists$ wegen Stetigkeit

    $\eta, \gamma \in \,]a,b[$ mit $f(\eta) > f(a) > f(\gamma)$

  Also ex. zwischen η und γ ein ξ: $f(\xi)$ den Satz erfüllt.

$\boxtimes$

③ Beweis erster Hauptsatz:

- Betrachte Differenzenquotienten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

- Mittelwertsatz: $\exists\ \xi \in\ ]x, x+h[$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

- Grenzübergang $h \to 0$

$\Rightarrow\ F'(x) = f(x)$, also ist F Stammfunktion.

$\boxtimes$