Analysis II

20.04.2017

J. Behrens

(1) Es reicht $m=1$ anzunehmen.

- $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$; $a_j \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$

<u>Beh:</u> $p(\bar{\alpha}) = 0$

- $p(\bar{\alpha}) = \sum_j a_j \bar{\alpha}^j = \sum_j \bar{a}_j \bar{\alpha}^j = \sum_j \overline{a_j \alpha^j} = \overline{\sum_j a_j \alpha^j}$ $p(\alpha)$

$= \overline{p(\alpha)} = 0$ $\boxtimes$

② **Beh:** $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ ist Polynom 2 Grades mit Koeff. in $\mathbb{R}$.

$$(x-z_j)(x-\overline{z_j}) = x^2 - z_j x - \overline{z_j}\,x + z_j\overline{z_j} = x^2 \underbrace{-(z_j+\overline{z_j})}_{-2\operatorname{Re} z_j} x + \underbrace{z_j\overline{z_j}}_{|z_j|^2}$$

Also: $= c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

mit
$$\left.\begin{aligned} c_2 &= 1 \\ c_1 &= -2\operatorname{Re} z_j \\ c_0 &= |z_j|^2 \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}$$

$\boxtimes$

③ **Gegeben:** $p(x) = \sum_j a_j x^j \quad , a_j \in \mathbb{R}$

Beh: $p(x)\ a_n \prod_{k=1}^{r} (x-z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2+p_j x+q_j)^{n_j}$,

$$\sum_k m_k + 2\sum_\ell n_\ell = n.$$

- Sei $w_j \in \mathbb{C}$ Nullstelle, so auch $\overline{w_j}$. Man kann also s Nullstellenpaare $w_j, \overline{w_j}$ finden mit Vielfachheiten n_j.
- Die restlichen r Nullstellen $z_k \in \mathbb{R}$ sind reell mit Vielfachheiten m_k.
- Fundamentalsatz der Algebra und Satz oben

$$p(x) = a_n (x-z_1)^{m_1}(x-z_2)^{m_2} \ldots (x-z_r)^{m_r} \underbrace{(x-w_1)^{n_1}(x-\overline{w}_1)^{n_1}}_{x^2+px+q} \cdot \ldots$$
$$\ldots (x-w_s)^{n_s}(x-\overline{w}_s)^{n_s}$$

$\Rightarrow$ Zerlegungsformel.

- Summenformel für den Grad folgt aus Vielfachheiten $\boxtimes$

④ **Beispiel** Sei $p(x) = \dfrac{x^4+2}{x^2+2x-1}$ — $p_n(x)$, — $q_m(x)$

$$= \sigma(x) + \frac{\rho(x)}{x^2+2x-1}$$

Ziel: Bestimme σ und ρ

Ansatz: $x^4+2 = \sigma(x)(x^2+2x-1) + \rho(x)$

$$= (c_2x^2 + c_1x + c_0)(x^2+2x-1) + d_1x + d_2$$

Koeffizientenvergleich: x^4 : $c_2 = 1$

x^3 : $(2c_2 + c_1) = 0 \Rightarrow c_1 = -2$

x^2 : $(-c_2 + 2c_1 + c_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 5$

Also : $\sigma(x) = x^2 - 2x + 5$ und damit

$$d_1x + d_0 = \cancel{x^4} + 2 - \underbrace{(x^2-2x+5)(x^2+2x-1)}_{[\cancel{x^4} + \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{2x^3} - \cancel{4x^2} + 2x + \cancel{5x^2} + 10x - 5]} = -12x + 7 = \rho(x)$$

$-12x$

7

⑤ Beispiel Partialbruchzerlegung

Sei $p(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$ echt gebrochen rational

- Finde Nullstellen des Nennerpolynoms: Schreibe

$$x^4 \underbrace{-2x^3+2x^2}+\underbrace{x^2-2x+1} = x^4-2x^2(x-1)+(x-1)^2 = (x^2-x+1)^2$$

Der quadratische Faktor x^2-x+1 hat keine reellen Nullstellen, sondern Paare

$$\omega_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \ \overline{\omega}_1 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{mit Vielfachheit } m_1=2$$

- Zerlegung:

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1 = [(x-\omega_1)(x-\overline{\omega}_1)]^2 = (x^2-x+1)^2 \quad (*)$$

- Nach Satz existiert

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2-x+1} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2-x+1)^2}$$

- Bestimmung von $b_{11}, b_{12}, c_{11}, c_{12}$

Ansatz: Multiplikation mit Nennerpoly.

$$x^2+x-1 = (b_{11}x+c_{11})(x^2-x+1) + b_{12}x+c_{12}$$
$$= b_{11}x^3 + (c_{11}-b_{11})x^2 + (b_{11}+b_{12}-c_{11})x + c_{11}+c_{12}$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= 0 \\ -b_{11}+c_{11} &= 1 \\ b_{11}-c_{11}+b_{12} &= 1 \\ c_{11}+c_{12} &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} b_{11} &= 0 \\ c_{11} &= 1 \\ b_{12} &= 2 \\ c_{12} &= -2 \end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x-2}{(x^2-x+1)^2}$$

Analysis II

21.04.2017

① Beweis für Vielfachheit $m=1$

- gegeben: $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$

Behauptung: $p(\bar{\alpha}) = 0$

- Es gilt: $p(\bar{\alpha}) = \sum_j a_j \bar{\alpha}^j = \sum_j \bar{a}_j \bar{\alpha}^j = \sum_j \overline{a_j \alpha^j} = \overline{\underbrace{\sum_j a_j \alpha^j}_{p(\alpha)}}$

$$= \overline{p(\alpha)} \overset{!}{=} 0 \qquad \boxtimes$$

② Beh.: $(x - z_j)(x - \bar{z}_j)$ ist Poly. 2. Grades mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - z_j x - \bar{z}_j x + z_j \bar{z}_j = x^2 - \underbrace{(z_j + \bar{z}_j)}_{-2\,\mathrm{Re}\, z_j \in \mathbb{R}} x + \underbrace{z_j \bar{z}_j}_{|z_j|^2 \in \mathbb{R}}.$$

Wir erhalten Polynom

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit
$$a_2 = 1$$
$$a_1 = -2\,\mathrm{Re}\, z_j$$
$$a_0 = |z_j|^2 \qquad \boxtimes$$

③ Gegeben: $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$

Beh: $p(x) = a_n \prod_{k=1}^{r} (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}$

$$\sum_k m_k + 2 \sum_j n_j = n.$$

- Sei $w_j \in \mathbb{C}$ Nullstelle, so auch $\bar{w}_j$.
  Man kann also s Nullstellenpaare $w_j, \bar{w}_j$ finden mit Vielfachheiten n_j.
- Die restlichen r reellen Nullstellen $z_k \in \mathbb{R}$ lassen sich ebenfalls finden mit Vielfachheiten m_k.
- Fundamentalsatz der Algebra

$$p(x) = a_n (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - z_r)^{m_r} \cdot$$

$$\cdot (x - w_1)^{n_1} (x - \bar{w}_1)^{n_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x - w_s)^{n_s} (x - \bar{w}_s)^{n_s}$$

$\Rightarrow$ Zerlegungsformel.

- Aus Vielfachheiten folgt Formel für Grad. $\boxtimes$

④ **Beispiel:** sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{x^4+2}{x^2+2x-1} = \sigma(x) + \frac{\rho(x)}{x^2+2x-1}$

Ziel: Bestimme σ und ρ

Ansatz: $x^4 + 2 = \sigma(x)(x^2+2x-1) + \rho(x)$

$$= (c_2x^2 + c_1x + c_0)(x^2+2x-1) + d_1x + d_0$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^4: \; c_2 = 1$$
$$x^3: \; (2c_2 + c_1) = 0 \implies c_1 = -2$$
$$x^2: \; (-c_2 + 2c_1 + c_0) = 0 \implies c_0 = 5$$

Also: $\sigma(x) = x^2 - 2x + 5$

$$d_1x + d_0 = \cancel{x^4} + 2 - \underbrace{(x^2-2x+5)(x^2+2x-1)}_{}$$

$$-(\cancel{x^4} + \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{2x^3} - \cancel{4x^2} + 2x + \cancel{5x^2} + 10x - 5)$$

$12x$

$+7$

$$\implies d_1 = -12$$
$$d_0 = 7$$

$$\implies \rho(x) = -12x + 7$$

⑤ Beispiel Partialbruchzerlegung

Sei $r(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$ echt gebrochen rational

- Finde Nullstellen des Nennerpolynoms: Schreibe

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1 = x^4 \underbrace{-2x^3+2x^2}_{2x^2(x-1)} + \underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2} = x^4-2x^2(x-1)+(x-1)^2$$
$$= (x^2-(x-1))^2 = (x^2-x+1)^2$$

Der quadratische Faktor (x^2-x+1) hat keine reelle Nullstelle aber Paar

$$\omega_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \;,\; \overline{\omega_1} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$ mit Vielfachheit $2 = m_1$.

- Zerlegung des Nennerpolynoms:

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1 = [(x-\omega_1)(x-\overline{\omega}_1)]^2 = (x^2-x+1)^2 \quad (*)$$

- Nach Satz (Partialbruchzerlegung):

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{b_{11}x+c_{11}}{(x^2-x+1)} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2-x+1)^2}$$

- Bestimmung der Koeff. $b_{11}, b_{12}, c_{11}, c_{12}$: Multipliziere mit Nennerpolynom $(*)$

$$x^2+x-1 = (b_{11}x+c_{11})(x^2-x+1) + b_{12}x+c_{12}$$
$$= b_{11}x^3 + (c_{11}-b_{11})x^2 + (b_{11}+b_{12}-c_{11})x + (c_{11}+c_{12})$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcl} b_{11} & = & 0 \\ -b_{11}+c_{11} & = & 1 \\ b_{11}-c_{11}+b_{12} & = & 1 \\ c_{11}+c_{12} & = & -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b_{11}=0 \\ c_{11}=1 \\ b_{12}=2 \\ c_{12}=-2 \end{array}$$

- Also erhalte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x-2}{(x^2-x+1)^2}$$