Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von **exp** ***x***

Definition 3.12: (Exponentialfunktion)
Die Funktion exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt Exponentialfunktion.

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von **exp x**

Satz 3.27: (Additionstheorem)

Für die gemäß

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

erklärte Exponentialfunktion gilt das Additionstheorem

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y).$$

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihen von **sin *x***, **cos *x***

Definition 3.15: (Sinus und Kosinus)
Die durch die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Reihen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

erklärten Funktionen heißen Sinus- und Kosinus-Funktion.

Beachte:

$$\cos x = \operatorname{Re} exp(ix), \qquad \sin x = \operatorname{Im} exp(ix).$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Definition 3.17:(periodische Funktion)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x + L) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt periodisch mit Periode $L > 0$. Das kleinste solche L, heißt die Minimalperiode oder auch primitive Periode von f.

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

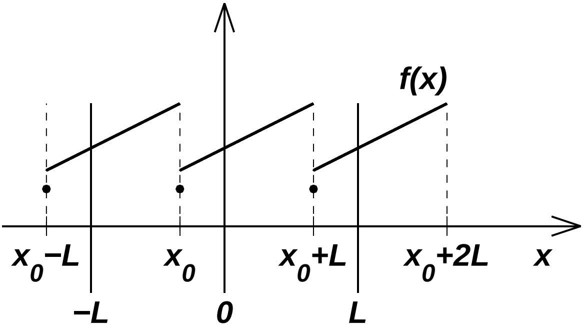

Abbildung 3.20: L-periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen $[x_0 + kL, x_0 + (k+1)L),\ x_0 \in \mathbb{R}$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Definition 3.18: (trigonometrisches Funktionensystem)
Die Funktionen 1, $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem

$$\{1, \sin nx, \cos nx\}.$$

Ein Ausdruck der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

heißt trigonometrische Reihe,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

trigonometrisches Polynom.

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Orthogonalitätsrelationen für das trigonometrische Funktionensystem ($k, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx &= 0\,, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx &= \delta_{nk}\pi\,, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx &= \delta_{nk}\pi\,.
\end{aligned}$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{für} \quad n = 0,1,2, \dots\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad \text{für} \quad n = 1,2,3, \dots\ .$$

Fourier Koeffizienten von f und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

zu f assoziierte Fourierreihe.

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- **punktweise gegen f.**
- **In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.**
- **An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.**

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

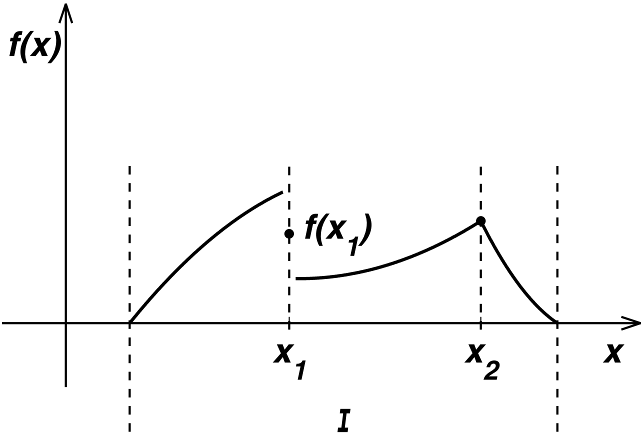

Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.30: (BESSELsche Ungleichung) Für alle auf $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f(x)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \ .$$

Dabei sind a_k, b_k die FOURIER-Koeffizienten von f.

Für $n \to \infty$ ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die Parseval'sche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \ .$$