Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 12

30.06.2016, SoSe 2016

Potenzreihen, Elementare Funktionen

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig. Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden mündlich während der Veranstaltung angesagt.

Letzte Vorlesung: Funktionenfolgen

Für festes n: Polynom
einfaches Modell für f
Wann ist das Modell "gut"?

Potenzreihen $\displaystyle\sum_{k=0}^{n\to\infty} a_k(x-x_0)^k$ $\quad x_0,\ a_k \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben.

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \dots$ gute Näherung für $\sum_{k=0}^{\infty} \dots$
$\iff s_n$ (glm.) konvergent

Untersuchung für festes x lieferte mit

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \text{ bzw. } r = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1} \quad \textbf{(Konvergenzradius)}$$

$$\begin{cases} \text{Konvergenz für} & |x-x_0| < r \\ \text{Divergenz für} & |x-x_0| > r \\ \text{keine Aussage für} & |x-x_0| = r \end{cases}$$

Sofern die oben angegebenen Grenzwerte existieren, gibt es also eine Zahl r, so dass die Potenzreihe für alle $|x-x_0| < r$ punktweise konvergiert und für alle $|x-x_0| > r$ divergiert.

Bemerkung :
$r = 0 \implies$ Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$.
$r = \infty \implies$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

SATZ 3.23: CAUCHY, HADAMARD

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Potenzreihe konvergiert punktweise im offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$. ✓

- Die Konvergenz ist in jedem $\underbrace{\text{kompakten}}_{\substack{\text{abgeschlossen} \\ \text{beschränkt}}}$ Teilintervall von $(x_0 - r, x_0 + r)$ gleichmäßig.

- Die Potenzreihe divergiert außerhalb von $(x_0 - r, x_0 + r)$. ✓

- In den Randpunkten $x_0 - r$ und $x_0 + r$ ist keine allgemeine Aussage möglich. ✓

Beweis zum Selbststudium: Zu zeigen ist nur noch die gleichmäßige Konvergenz. Sei

$$\boxed{r := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

Sei $r > 0$, und o.B.d.A. $x_0 = 0$, sowie $I = [-z, z] \subset (-r, r)$.

Zur gleichmäßigen Konvergenz in $I = [-z, z] \subset (-r, r)$:

Es gibt $M \in \mathbb{R}$ mit $z < M < r$, so dass $\frac{z}{r} < \frac{M}{r} =: q < 1$. Also ist

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\, z = \frac{z}{r} < \frac{M}{r} = q < 1.$$

Damit gilt für alle hinreichend großen k

$$\sqrt[k]{|a_k|}\, z < q < 1 \implies |a_k|\, z^k < q^k < 1$$

$$\implies |a_k\, x^k| < q^k \qquad \forall x \in [-z, z],\ k \geq k_0$$

Aus dem Majorantenkriterim und der Konvergenz der geometrischen Reihen für $|q| < 1$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe in jedem kompakten Teilintervall von $(-r, r)$.

Im Fall $r = 0$ gilt $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$. Damit ist für jedes feste $x \neq x_0$ auch die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}(x - x_0)^k$ unbeschränkt. Die Potenzreihe divergiert $\forall x \neq x_0$.□

Bemerkung:

- Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$ mit $a_k \neq 0\,,\ \forall k \geq k_0$ gilt

Das ist das gleiche r wie oben sonst pktweise

$$\boxed{r := \lim_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

div — konv — x_0+r — div

div — div $x_0+\tilde{r}$

BEWEIS: Folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium für Zahlenreihen.

- Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts kann man eine Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzintervalls gliedweise integrieren und differenzieren. Wichtig!

letzte Vorl.: Taylor-Polynom zu $\ln(x)$ mit $x_0 = 1$

Beispiel:

Letzte Vorlesung Folie 8: $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$

a_k

$a_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}$

Konvergenzradius: $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^k}\right| = \lim \frac{k+1}{k}$

$= \lim\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1 = r$

$f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \qquad f_k'(x) = (-1)^{k-1}(x-1)^{k-1}$

$D_n(x) := T_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{k-1}}_{b_k} (x-1)^{k-1}$

Konvergenzradius: $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{(-1)^k}\right| = 1$

Andererseits für $|x-1| < 1$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} =$

$\Longrightarrow$ Konvergenz von T_n und D_n für $|x-1| < 1$ also $x \in]0,2[$

Für die Reihe der Ableitungen f_k' gilt $D_n \to \frac{1}{x}$.

Aber: wogegen? $T_n(x) \longrightarrow \ln(x)$?

Anwendung von SATZ 3.20:

$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall q \in \mathbb{R} \quad q \neq 1$$

für $|q| < 1 \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$$D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (1-x)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}$$

für $|1-x| < 1 \qquad D_n(x) \longrightarrow D(x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$

<u>glm. Konvergenz</u> $\qquad f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \right)' =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (x-1)^{k} = D(x) = \frac{1}{x}$$

Satz 3.20

Die Glieder f_k sind differenzierbar auf $I := [0,2]$ $f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$

der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x^*)$ existiert für wenigstens ein $x^* \in I$: $\sum f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$

z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(1) = 0$

Außerdem schon bekannt: pktw. Konv. in $]0,2[$
nur nicht wogegen!

Die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ ist gleichmäßig konvergent gegen $\frac{1}{x} = (\ln(x))'$ auf jedem $I := [1-z, 1+z] \subset (0,2)$

Satz 3.20: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \xrightarrow{\text{glm.}} f$ auf I und

Und $f' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' = \frac{1}{x}$

Also $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$f(1) = \underline{\underline{\ln(1) + C = 0 + C}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1-1)^k \underline{\underline{= 0}} \rightarrow \boxed{C=0}$

Was passiert am Rand? $\Longrightarrow T_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(x)$ auf $(0,2)$

Schon gesehen: $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(0-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ harmonische Reihe $\rightarrow$ divergent

Und $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(2-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ alternierende harmonische Reihe $\rightarrow$ konvergent

Gilt dann auch $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(2-1)^k = \ln(2)$?

Abelscher Grenzwertsatz:

$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x - x_0)^k$ konvergent in $(x_0 - r,\, x_0 + r)$

Also wenn Konvergenz gegen f in (x_0-r, x_0+r) und konvergent gegen irgendwas für x_0+r

und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x_0 + r - x_0)^k$ Konvergent,

Dann irgendwas $= f(x_0+r)$

so glit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, r^k \; = \; f(x_0 + r)$.

Analog für $x_0 - r$.

Beobachtung: In unserem Beispiel haben die Potenzreihen T_n und T_n' mit $x_0 = 1$ den gleichen Konvergenzradius.

Zufall?

SATZ 3.26: Konvergenz der abgeleiteten bzw. integrierten Potenzreihe

$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ habe Konvergenzradius $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

glm. Konv.

Die abgeleitete Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k k}_{b_k} (x-x_0)^{k-1}$

hat den Konvergenzradius :

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k \cdot k}{a_{k+1} \cdot (k+1)}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{k}{k+1}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}} = r$$

Satz 3.20: Es darf im Konvergenzintervall gliedweise differenziert werden:

$$f'(x) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x-x_0)^k\right)'$$

$\longrightarrow$ Man kann beliebig oft differenzieren ohne, dass sich das Konvergenzintervall ändert!

Analog git für die integrierte Reihe

glm. kon

$$\int f(x)\,dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x-x_0)^k\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}}_{b_k}$$

Konvergenzradius

ρ für neue Reihe

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = \lim \left| \frac{a_k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{a_{k+1}} \right|$$

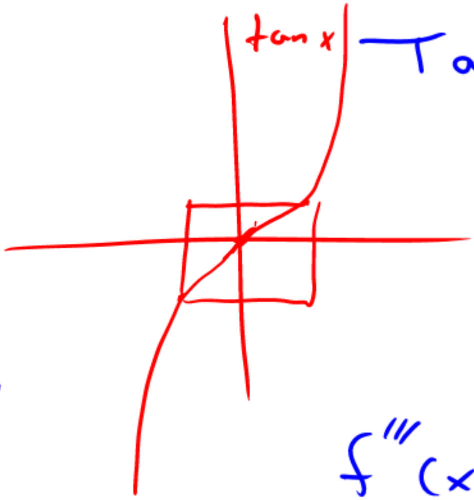
$$= \lim \left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \cdot \frac{k+2}{k+1} \right)$$

$$= \lim \left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \cdot \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{k}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{k}}} \right) = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = r$$

Falls existent: Taylor = Potenzreihe

Beispiel: gesucht Potenzreihe zu $f(x) = \arctan(x)$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$$

Das wird anstrengend

besser $\circledast$

$\circledast$ $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$|q| < 1$

$\circledast$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$|q|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

$|x^2| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$$

für $|x| < 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx$$

kleiner Exkurs: Annahme wir wollten hier r aus a_n bestimmen.

$a_{2k} = (-1)^k$ $\quad a_{2k+1} = 0$

$\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert nicht

$\lim \sqrt[k]{|a_k|}$ auch nicht!

glm. kon.

$$\overset{\downarrow}{=} \sum \int (-1)^k x^{2k}\,dx$$

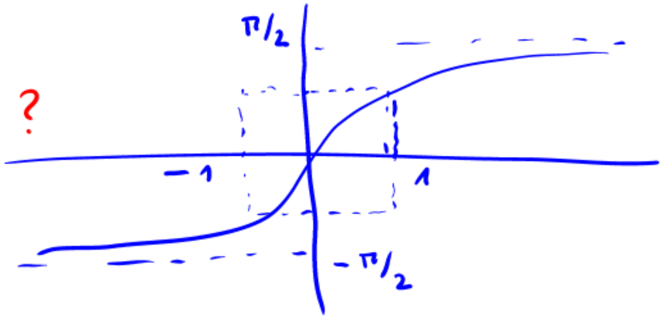
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + C \underset{C=0}{=} \arctan(x) \quad \text{für } -1<x<1$$

$\boxed{r=1}$

Aber $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$

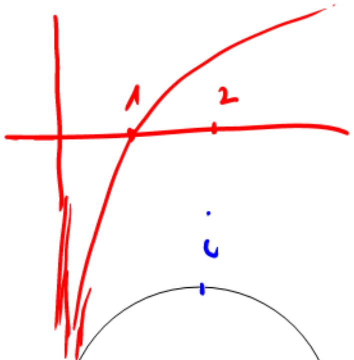
Alternativ $z = x^2 \to$ HÜ, ÜB

$\arctan(0) = 0 \implies \boxed{c=0}$



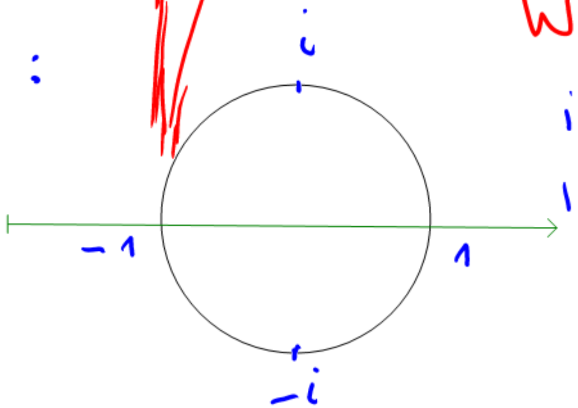
Warum eigentlich nur auf]-1, 1[?

Bei ln klar, dass bei x=0 Schluss ist mit Konvergenz



Wieso aber bei $\frac{1}{1+x^2}$?

ℂ :



in ℂ $\quad i^2 = -1$

$|x| > 1$ $\longrightarrow$ Mathe IV

$$\frac{1}{x^2\left(1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k$$

Exponentialfunktion:

Motivation: Wachstumsprozess

$y(t)$ = Masse einer Population zum Zeitpunkt t

Annahme: Zuwachs $y(t+\Delta t) - y(t) = \alpha \cdot y(t) \cdot \Delta t$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot y(t)$$

$\Delta t \to 0$

Liefert $y'(t) = \alpha \cdot y(t)$

$y'(t) = \alpha\, y(t)$

Mit $\alpha = 1$ und $y(0) = 1$ liefert Potenzreihenansatz (oder Taylorentwicklung von y): DGL. $\to$ 3. Sem.

$x_0 = 0$

$$y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \underset{(x-0)^k}{x^k} = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}$$

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k+1} = \overbrace{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \cdots}$$

$y(0) = \boxed{a_0 = 1}$

Koeffizientenvergleich:

x^0: $a_0 = \boxed{a_1 = 1}$

x^1: $a_1 = 2a_2 \Longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

x^2: $a_2 = 3a_3$

$\Longrightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \boxed{\frac{1}{2 \cdot 3}}$

Definiere $\boxed{\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k}$ Konvergenzradius:

$$r = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \frac{(n+1)!}{1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \ldots = \infty$$

$\boxed{a_n = \frac{1}{k!}}$

Analyis II
TUHH
VL 12, 1. Juli 2016

Potenzreihen

Michael Hinze

Potenzreihen sind spezielle Funktionenreihen

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{Potenzreihe}$$

Entwicklungspunkt

Bsp: Taylorformel: f $(n+1)$-mal stetig diffbar bei x_0. Dann

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom } T_n \text{ von } f \text{ (n-ten) „einfaches" Modell für } f \text{ bei } x_0} + R_{n+1}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$n \to \infty$: $T_n \to f$?

Taylorreihe: $T_\infty(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Konvergenz? $\rightarrow$ Quotienten- bzw Wurzelkriterium

Was liefern diese Kriterien für

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad ? \qquad x \text{ fix}, \quad \tilde{a}_k := a_k (x-x_0)^k$$

Damit $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k$. Wurzelkriterium hier:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{a}_k|} = q \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergenz} \\ = 1 & ? \end{cases}$$

Hier also

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{a}_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x-x_0|^k} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \overset{!}{=} q < 1$$

Forderung an x-Werte: $|x-x_0| < \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Analog liefert das Quotientenkriterium

$$\lim \left|\frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k}\right| = q \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergenz} \\ = 1 & ? \end{cases}$$

Forderung: $|x-x_0| < \lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

Bsp: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k} \overset{u=x^2}{=} \sqrt{u} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \overset{a_k}{\frac{3^k}{k+1}} u^k}_{\text{Potenzreihe mit EP } x_0 = 0.}$$

Konvergenz, falls (Quotientenkriterium)

$$|u| < \lim_{k\to\infty} \frac{3^k(k+2)}{(k+1)\,3^{k+1}} = \frac{1}{3}, \quad \text{also } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zentraler Satz: Cauchy-Hadamard $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

besitzt ein Konvergenzintervall $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, s.d.

i.) punktweise Konvergenz in $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$ vorliegt

ii.) Divergenz in $(-\infty, x_0-\varrho)$ und $(x_0+\varrho, \infty)$ vorliegt

iii.) über die Stellen $x_0-\varrho$ und $x_0+\varrho$ Aussagen herzuleiten sind.

Es gilt: $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$

Identitätssatz für Potenzreihen

Seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k .$$

f und g sollen übereinstimmen auf Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_j \neq x_l$ für $j \neq l$ und $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$

Es gilt also $f(x_j) = g(x_j) \quad \forall_{j\in\mathbb{N}}$

Dann gilt schon $f(x) = g(x) \quad \forall x$, d.h. f und g stimmen überein

Bew.: mit vollst. Induktion, SgL

Zur gleichmäßigen Konvergenz von Potenzreihen

Satz: Besitzt $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ den Konvergenzkreis $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, so konvergiert $s(x)$ gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$

abgeschlossen und beschränkt

$r = \rho$ (nachfolgend)

Nachweis: Œ $x_0 = 0$, $r := \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} > 0$ und $[a,b] = [-z, z]$.

Dann gibt es $M \in \mathbb{R}$ mit $z < M < r$ und $\frac{z}{r} < \frac{M}{r} =: q < 1$.

Damit
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}\, z = \frac{z}{r} < \frac{M}{r} = q < 1$$

Für k groß genug gilt dann: $\sqrt[k]{a_k}\, z < q < 1 \Rightarrow |a_k| z^k < q^k < 1$

$\Rightarrow |a_k| |x|^k < q^k \quad \forall x \in [-z, z]$, k groß genug (etwa $\geq k_0$)

Damit gilt
$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Damit gleichmäßige Konvergenz gezeigt. $\boxed{R}$

Bemerkung: Alle Aussagen über gleichmäßige Konvergenz im Zshg mit Ableitungen und Integrierbarkeit übertragen sich direkt auf Potenzreihen!

Was passiert bei $|x - x_0| = \rho$?

Bsp. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{5^k}{k+1} x^k$, $\rho = \frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1} = \infty$ Divergenz

$x = -\frac{1}{5}$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ konvergent mit Leibniz Kriterium.

Aussagen hierzu liefert der Abel'sche Grenzwertsatz

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ sei konvergent $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$.

Ferner konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varrho^k$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0+\varrho \\ x < x_0+\varrho}} S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varrho^k$$

Eine analoge Aussage gilt für $-\varrho$.

<u>Differentiation von Potenzreihen</u>

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ konvergiere in $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$

Dann zunächst formal $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$

Ist dies $S'(x)$? Ja, denn $S'(x)$ hat denselben Konvergenzkreis

wie S, weil

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k|a_k|}{(k+1)|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = 1\cdot\varrho = \varrho.$$

Analog können wir gliedweise integrieren, weil jede Partialsumme von S R-integrierbar ist (Partialsummen sind Polynome!)

<u>Bsp</u> $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ für $|x| < 1$

Damit folgt in $(-1,1)$: $\int f(x)\,dx = \ln|1+x| + C$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\ln(1+0) = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 0^{k+1} \Rightarrow C = 0$$

Exponentialfunktion (Potenzreihe mit $x_0 := 0$ und $a_k := \frac{1}{k!}$)

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} k+1 = \infty$$ Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$!

$$(e^x)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

Es gilt z.Bsp.

$$\boxed{e^x e^y = e^{x+y}}$$ (folgt mit Cauchy Produkt von Reihen!)

$$\| $$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x^j y^{k-j}}_{(x+y)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = e^{(x+y)}$$