Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

WiSe 2015/2016

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.15: (gliedweise Differentiation) Sind (f_n) und (f_n') auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

so ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.16: (gliedweise Integration) Ist (f_n) eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen, so ist deren Grenzfunktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 3.8: (Funktionenreihe) Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf D, dann definieren wir durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \ , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

eine neue Funktionenfolge (s_n) und nennen diese Folge Funktionenreihe der f_k. Die f_k heißen Glieder der Reihe und die s_n Teil- oder Partialsummen. Wir beschreiben die Reihe auch durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ \text{ mit } x \in D.$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 3.9: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, falls die Folge (s_n) der Teilsummen punktweise zw. gleichmäßig konvergent ist.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ wird auch Summe der Reihe oder Summenfunktion genannt und durch

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \; (x \in D) \quad \text{oder} \quad s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

bezeichnet.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.17: (Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Reihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen auf D konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn Folgendes erfüllt ist:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle n, m mit $m > n \geq n_0$ gilt

$$||\sum_{k=n+1}^{m} f_k||_\infty < \epsilon \ .$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 3.10: (gleichmäßige absolute Konvergenz) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von beschränkten Funktionen auf D heißt gleichmäßig absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_{\infty}$$

konvergiert.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.18: (Majorantenkriterium von WEIERSTRASS) Gilt für die Glieder der Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von einem Index k_0 an

$$||f_k||_\infty \leq \alpha_k \quad (k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots)$$

und ist die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ konvergent, so ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ heißt eine Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.19: (Stetigkeit der Reihensumme) Sind die Glieder einer in $D = [a, b]$ gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ in $[a, b]$ stetig, so ist die Summe

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

ebenfalls stetig in $[a, b]$. In den Randpunkten ist einseitige Stetigkeit von f_k bzw. s gemeint.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.20: (gliedweises Differenzieren) Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a, b]$ differenzierbarer Funktionen. Existiert der Grenzwert

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für wenigstens ein $x \in [a, b]$, und ist die Ableitungsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$$

gleichmäßig konvergent in $[a, b]$, so ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$, die Summe $s(x)$ ist differenzierbar und es gilt

$$s'(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' \text{ (gliedweise differenzieren).}$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.21: (gliedweises Integration) Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf $[a, b]$ integrierbarer Funktionen besitzt auf $[a, b]$ eine integrierbare Summenfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx \ .$$

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Definition 3.11: Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \ , \quad x, x_0 \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R}$$

mit den Polynomen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ als Partialsummen heißt Potenzreihe. x_0 heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe, die Zahlen a_k heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Beachte: Diese Definition ist auch für komplexe Zahlen $x, x_0 \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C}$ sinnvoll. In diesem Fall heißt die Potenzreihe komplex.

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.22: (Identitätssatz)
Es seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

und

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

zwei Potenzreihen, die beide in einem offenen Intervall I um x_0 konvergieren. Stimmen dann f und g auf einer Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ $(x_0 \neq x_n)$ überein, d.h. $f(x_k) = g(x_k)$ für $k = 1,2,3,\ldots$, so sind beide Potenzreihen identisch, d.h. es gilt

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I, \text{ und } \quad a_k = b_k \quad \text{für } k = 0,1,\ldots.$$

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.23: (Satz von CAUCHY und HADAMARD)
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit den Koeffizienten a_k und dem Entwicklungspunkt x_0 gibt es ein Konvergenzintervall $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ mit folgenden Eigenschaften:

a) **Die Potenzreihe konvergiert für $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ punktweise. Sie konvergiert außerdem gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.**
b) **Außerhalb von $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ divergiert die Potenzreihe.**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

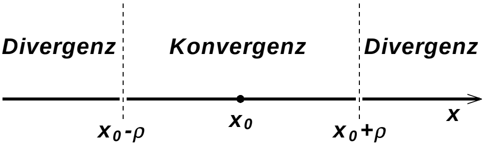

Abbildung 3.10: Konvergenzradius reeller Potenzreihen

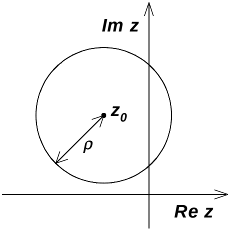

Abbildung 3.11: Konvergenzkreis in der GAUSS**schen Zahlenebene**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

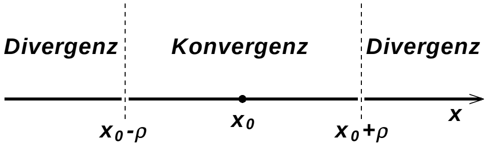

Abbildung 3.10: Konvergenzradius reeller Potenzreihen

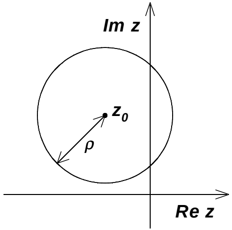

Abbildung 3.11: Konvergenzkreis in der GAUSS**schen Zahlenebene**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.24: (Konvergenzradius)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c > 0, \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0,$$

so ist

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der Konvergenzradius der Reihe.