Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 11

23/24.06.2016, SoSe 2016

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig. Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden mündlich während der Veranstaltung angesagt.

Letzte Vorlesung: Funktionenfolgen

Für $k \in \mathbb{N}$ gegeben $f_k : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} =: f(x)$$

Funktionenfolge: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Beispiel: $f_k(x) := x^k$ auf $[0,1]$

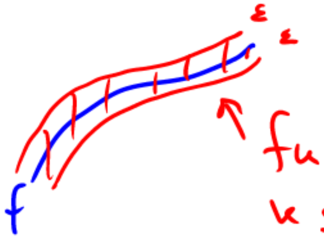
Definition 3.5: Eine Funktionenfolge (f_k) auf D **konvergiert punktweise** gegen die **Grenzfunktion** f, wenn

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in D}$$

Definition 3.7: Eine Funktionenfolge (f_k) auf D **konvergiert gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion** f, wenn

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \|f - f_k\|_\infty = 0 \iff \forall \epsilon > 0 : \exists N_0(\epsilon) : \|f - f_k\|_\infty < \epsilon \quad \forall\, k \geq N_0(\epsilon).}$$

Schreibweise: $f_k \to f$ für $k \to \infty$.



$f_k \in$ //// wenn k groß genug

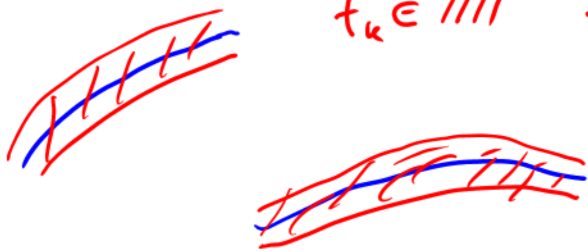
SATZ 3.13: Cauchy-Kriterium

$$(f_k) \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 : \exists N_0(\epsilon) : \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \quad \forall\, n, m \geq N_0(\epsilon).$$

SATZ 3.14: Jede gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen konvergiert gegen eine stetige Grenzfunktion.

$f_k \in ////$ für f_n stetig

↯



ENDE DER WIEDERHOLUNG!

SATZ 3.15: Vertauschbarkeit von Limesbildung und Differentiation

(f_k) Folge differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$

$f_k(x_0) \to f(x_0)$ für mindestens ein $x_0 \in [a, b]$

Ableitungsfolge (f_k') konvergiere gleichmäßig (gegen irgendeine Fkt).

Dann gilt

a) (f_k) konvergiert auf [a,b] gleichmäßig gegen eine Funktion f.

b) (f_k') konvergiert gleichmäßig gegen f'.

Wissen:

$\|f_n' - f_m'\|_\infty \to 0$

$|f_n(x_0) - f(x)| \to 0$

Definiere

$h(x) = f_n(x) - f_m(x)$

$h'(x) = f_n'(x) - f_m'(x)$

Beweisskizze für a): Zu zeigen $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_\infty = 0$.

Nach Cauchy genügt es zu zeigen:

$\forall \epsilon > 0 : \exists N_0(\epsilon) : \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0(\epsilon)$.

$h(x) - h(x_0) = h'(\xi) \; |x - x_0|$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewandt auf $f_n - f_m$ ergibt

$$|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(x_0)| = |(f_n-f_m)'(\xi)\cdot(x-x_0)| \le \|f_n'-f_m'\|_\infty|x-x_0| \qquad (*)$$

damit erhält man

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f_m(x)| &= |f_n(x)-f_m(x)\overbrace{-(f_n(x_0)-f_m(x_0))+(f_n(x_0)-f_m(x_0))}^{=0}| \\
\text{Δs-Ungleichung} &\le |(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))| + |(f_n(x_0)-f_m(x_0))| \\
&\overset{(*)}{\le} \underbrace{\|f_n'-f_m'\|_\infty}_{\to 0}|x-x_0| + \underbrace{|(f_n(x_0)-f_m(x_0))|}_{\to 0} \\
&\le \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n,m \text{ hinreichend groß.} \qquad f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f
\end{aligned}$$

Beweis b: mit ähnlichen Mitteln, aber aufwendiger.

Bei gleichmäßiger Konvergenz der Ableitungen können also Grenzwertbildung und Differentiation vertauscht werden.

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f_k' = \left(\lim_{k\to\infty} f_k\right)' = f'}$$

SATZ 3.16: Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration

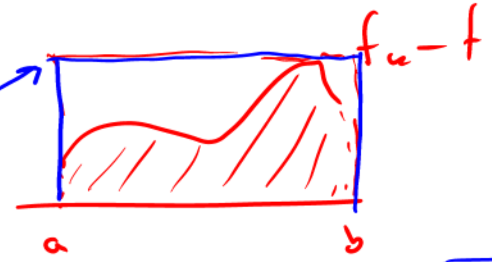
(f_k) sei eine gleichmäßig konvergente Folge Riemann integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$. Dann ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ integrierbar und es gilt

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,.}$$

Beweisskizze:

Zur Integrierbarkeit : vergleiche die Differenz der Ober- und Untersummen von f mit der Differenz der Ober- und Untersummen von f_n, die ja bei hinreichend feiner Zerlegung gegen Null gehen müssen.

$\max|f-f_n| = \|f-f_n\|_\infty$



Zur Vertauschbarkeit:

$$\left|\int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_k(x) - f(x)dx\right| \le \overbrace{\underbrace{\|f_k - f\|_\infty}_{\to 0}(b-a)}^{\text{Fläche } \square}\,. \qquad \square$$

Funktionenreihen Ziel: Potenzreihen, Fourierreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Partialsummen der Potenzreihen $=$ Polynome : Modelle für kompliziertere Funktionen

Partialsummen der Fourierreihen $=$ Sinus/Cosinus Summen : Modelle für periodische Funktionen, Schwingungen $\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega\pi) + b_k \sin(k\omega x)$

Analog zu Zahlenreihen: Bei gegebener Folge (f_k), $f_k : D \to \mathbb{R}$ bilde Folge der Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$s_0(x) = f_0(x)$

$s_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$

$s_2(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$

Schreibweise: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ oder nur $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Bsp $f_k(x) = x^k$

$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$\longrightarrow s(x) = \frac{1}{1-x}$ falls $|x|<1$

Beispiel 1: Wir kennen Taylorpolynome zum Beispiel zu $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$:

$$s_n(x) = T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{f_k(x)}$$

Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \quad //$$

konvergiert das? glm.? pktw? wo gegen? Für welche x?

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} \xrightarrow{\text{Induktion}}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \qquad f^{(k)}(1) = (k-1)!\,(-1)^{k-1}$$

$$T_n(x) = \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\,(-1)^{k-1}}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

konvergiert pktw. für $|x-1|<1$ denn geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x-1)^k$ ist Majorante.

$x=0$: $\sum \frac{(-1)^{k-1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = -$harmonische Reihe $\rightarrow$ divergent

$x=2$: $T_n(2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ alternierende harm. Reihe $\rightarrow$ konvergent

Punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Reihe heißt punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Folge (s_n) der Partialsummen.

Sätze 3.13 bis 3.16 lauten für Reihen:

SATZ 3.17: Cauchy Konvergenzkriterium

$\|s_m - s_{n-1}\|_\infty < \varepsilon$

wenn m, n groß genug

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $[a, b]$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$\Longleftrightarrow \left\| \sum_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \right\|_\infty < \varepsilon$

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} f_k \right\|_\infty \leq \epsilon \qquad \forall n, m \geq N_0(\epsilon).$$

$\Longleftrightarrow \left\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right\|_\infty < \varepsilon$

Definition 3.10:

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Zahlenreihe

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \text{ konvergiert.}}$$

Absolut konvergente Reihen konvergieren gleichmäßig, denn

max $|f+g|$

$\leq$ max $|f|$ + max $|g|$

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_\infty .$$

SATZ 3.18: Majorantenkriterium von Weierstrass

Gilt $\|f_k\|_\infty \leq a_k$ für $k \geq k_0$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig und absolut konvergent.

Majo. für Zahlenreihen $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergent

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ absolute Konvergenz

$\Longrightarrow$ glm. //

Beispiel: $f_k(x) = \dfrac{\sin(kx)}{k^2+1}$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2+1}, \quad \frac{\sin(kx)}{k^2+1} = f_k(x)$$

$$\left\| \frac{\sin(kx)}{k^2+1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{k^2+1} =: a_k \leq \frac{1}{k^2}$$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverg. Analysis I

$$\Longrightarrow S_n \xrightarrow{\text{glm.}} S \quad \text{(mit unbekanntem } S\text{)}$$

SATZ 3.19: Sind die Glieder f_k einer gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig, so ist es auch die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

f_k stetig

Beweisskizze:

$\Longrightarrow$ Jede endliche Summe

$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ stetig

$$\Big\downarrow \text{Satz 3.14}$$

$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig

SATZ 3.21: Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ integrierbarer Funktionen, ist integrierbar und es gilt

$$\boxed{\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k \, dx \ .}$$

SATZ 3.20: Sind die Glieder f_k einer Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ differenzierbar auf [a,b], existiert der Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$ für wenigstens ein $x_0 \in [a,b]$, und ist die Ableitungsreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig konvergent auf [a,b], so ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent auf [a,b] und es gilt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f_k' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' .}$$

Alles selbstverständlich?

Es gilt doch $(f+g)' = f'+g'$

Also auch $\left(\sum f_k\right)' = \left(\sum f_k'\right)$

Ja. Aber nur für ~~endlich~~ viele Summanden klar!

Beispiel: $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2+1}$ $\quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2+1} \xrightarrow[\text{auf } \mathbb{R}]{\text{glm}} s(x)$ siehe oben

$f_k'(x) = \frac{k \cdot \cos(kx)}{k^2+1}$ $\quad s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cos(kx)}{k^2+1}$ harmlos

$\lim_{n\to\infty} s_n'(\pi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{k^2+1}$ konvergiert nach Leibniz-Regel

Allgemein:

$s_n'(x) \xrightarrow{?} s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \cos(kx)}{k^2+1}$?

Dann wäre

$s'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\frac{1}{k}}$

divergent, denn

$$\frac{1}{k+\frac{1}{k}} > \frac{1}{k+1}$$

Also doch nicht alles so selbstverständlich!

Definition 3.11. Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen der Form

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad x_0,\ a_k \in \mathbb{R} \text{ fest vorgegeben.}$$

$x_0 =$ Entwicklungspunkt.

Die Partialsummen von Potenzreihen sind Polynome:

$f_k(x) = a_k (x - x_0)$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = \underbrace{a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n}_{\text{Polynom } \in \Pi_n}$$

Falls $s_n \xrightarrow{\text{glm}} s = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$

$\Longrightarrow s_n$ gute Näherung für s wenn n groß genug!

Taylor-Reihen

$$s_n(x) = T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$s(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad s_n \longrightarrow s\ ? \quad \text{wenn ja} \quad s \equiv f\ ?$$

wissen

$$|f(x) - s_n(x)| = \underbrace{\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|}_{\text{Falls} \longrightarrow 0} \quad \forall x \in I = ?$$

$$\Longrightarrow \quad T_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{pktw.}$$

$$T_n \longrightarrow f\ ? \quad \text{glm}$$

Beispiel:

$f(x) = \ln(x)\,,\ x_0 = 1$

Folie 8: $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}_{}$

Halte x fest ist ↗ fest

$b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$ Zahlenfolge, fest für festes k

Quotientenkriterium für Zahlenreihen: Falls $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = q \begin{cases} < 1 \longrightarrow \text{Konvergenz} \\ > 1 \longrightarrow \text{Divergenz} \end{cases}$

Hier also $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{\cancel{(-1)^k}\,(x-1)^{\cancel{k+1}}}{k+1} \cdot \frac{k}{\cancel{(-1)^{k-1}}\,\cancel{(x-1)^k}}\right| = \frac{k}{k+1}\,|x-1|$

$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left(\lim \frac{k}{k+1}\right)\cdot|x-1| \begin{matrix} < 1 \Longrightarrow \\ > 1 \Longrightarrow \text{Divergenz} \end{matrix}$

$|x-1| < \lim\limits_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = 1 \longrightarrow$ Konvergenz

div 0 1 2 div

? konv. ?

Allgemein: wo (für welche x) konvergieren Potenzreihen? Gegen was?

Zur Erinnerung: Für eine reelle Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gelten:

Quotientenkriterium: Für $b_k \neq 0\,, \quad \forall k \geq k_0$:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = q \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \quad \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Longrightarrow \quad \text{Divergenz} \\ = 1 & \Longrightarrow \quad \text{????? keine Aussage} \end{cases}$$

Wurzelkriterium

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} = q \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \quad \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Longrightarrow \quad \text{Divergenz} \\ = 1 & \Longrightarrow \quad \text{????? keine Aussage} \end{cases}$$

$\limsup b_k$ war definiert als größter Häufungspunkt der Folge, falls diese beschränkt ist, und ∞ anderenfalls.

$$\sum \underbrace{a_k (x-x_0)^k}_{b_k}$$

Wendet man das Quotientenkriterium auf eine Potenzreihe für ein festes x an, so bildet man

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{\cancel{k+1}}}{\cancel{a_k(x-x_0)^k}}\right| < 1 \iff \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-x_0| < 1$$

$$\iff |x-x_0| < \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

und erhält

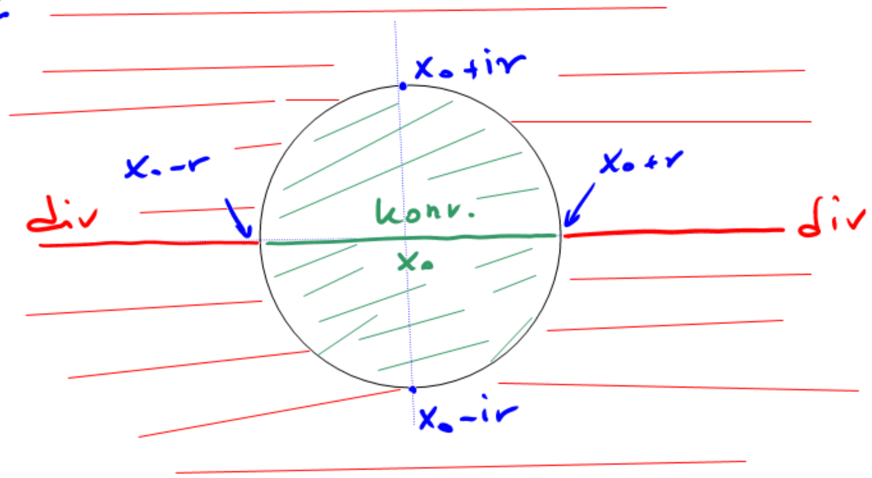
$$\underline{\underline{\lim_{k\to\infty}}} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-x_0| =: q \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Longrightarrow \text{Divergenz} \\ = 1 & \Longrightarrow \text{????? keine Aussage} \end{cases}$$

der Zahlenreihe
also für festes x
$\rightarrow$ pktw. konv.
der Funktionenfolge s_n

$|x-x_0| < \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ Punktweise Konvergenz der Funktionenreihe

$|x-x_0| >$ '' $\rightarrow$ Divergenz

in $\mathbb{C}$



$$\boxed{r := \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}}}$$

$=$ Konvergenzradius

Analog liefert die Anwendung des Wurzelkriteriums auf $b_k = a_k(x - x_0)^k$ mit

$$\boxed{r := \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{Konvergenz für} & |x - x_0| < r = \int \\ \text{Divergenz für} & |x - x_0| > r \\ \text{keine Aussage für} & |x - x_0| = r \end{cases}$$

Sofern die oben angegebenen Grenzwerte existieren, gibt es also eine Zahl r, so dass die Potenzreihe für alle $|x - x_0| < r$ punktweise konvergiert und für alle $|x - x_0| > r$ divergiert.

Beispiel: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1}(x-2)^k$$

$$a_k = \frac{3^k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{3^k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{3^{k+1}}$$

$$\lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{1}{3} \lim \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{3} \lim \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{3} = r \qquad x_0 = 2$$

$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Punktw. konv. in } \left]2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}\right[\\ \text{Divergenz in } \left]-\infty, 2-\frac{1}{3}\right[\cup \left]2+\frac{1}{3}, \infty\right[\end{cases}$

$x = 2-\frac{1}{3}$ $\quad \sum^{\infty} \frac{3^k}{k+1}\left(2-\frac{1}{3}-2\right)^k = \sum^{\infty} \frac{3^k}{k+1}\frac{(-1)^k}{3^k} = \sum^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ altern. harm. Reihe $\to$ konvergent

$x = 2+\frac{1}{3}$ $\quad \sum^{\infty} \frac{3^k}{k+1}\left(2+\frac{1}{3}-2\right)^k = \sum^{\infty} \frac{1}{k+1}$ harm. Reihe $\to$ Divergenz

Bis auf die glm. Konvergenz haben wir bereits den folgenden Satz:

SATZ 3.23: CAUCHY, HADAMARD

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Potenzreihe konvergiert punktweise im offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Die Konvergenz ist in jedem kompakten Teilintervall von $(x_0 - r, x_0 + r)$ gleichmäßig.
- Die Potenzreihe divergiert außerhalb von $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- In den Randpunkten $x_0 - r$ und $x_0 + r$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Siehe Beispiel.

Bemerkung :
$r = 0 \implies$ Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$.
$r = \infty \implies$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

r heißt **Konvergenzradius** der Reihe.