Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.4: (Funktionenfolge) Die unendliche Folge

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

der Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R},\ k = 0,1,2,\ldots,$ nennen wir Funktionenfolge auf D und schreiben dafür wie im Falle von Zahlenfolgen auch kurz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (f_n).

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.5: (punktweise Konvergenz) Eine Funktionenfolge (f_n) auf D heißt punktweise konvergent, falls für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

Anstelle von punktweiser Konvergenz sprechen wir auch abkürzend von Konvergenz.

Die Grenzfunktion f ist dabei für jedes $x \in D$ durch

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

erklärt.

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.6: (Abstand und Supremumsnorm) Sind f und g beschränkte Funktionen auf D, so bezeichnen wir mit

$$||f - g||_\infty := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

den Abstand dieser Funktionen voneinander.

Die Supremumsnorm $||f||_\infty$ von f auf D ist definiert durch

$$||f||_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Handelt es sich bei den Funktionen um stetige Funktionen und ist D eine kompakte Menge, z.B. ein abgeschlossenes Intervall, dann gilt

$$||f - g||_\infty := \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad ||f||_\infty = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

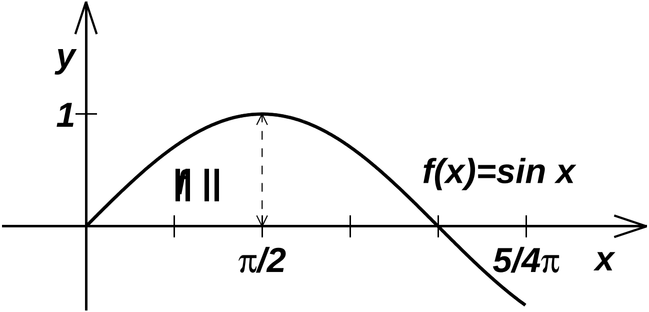

Abbildung 3.3: $||f||_\infty$**, Supremumsnorm von**
$f : [0, \frac{5}{4}\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

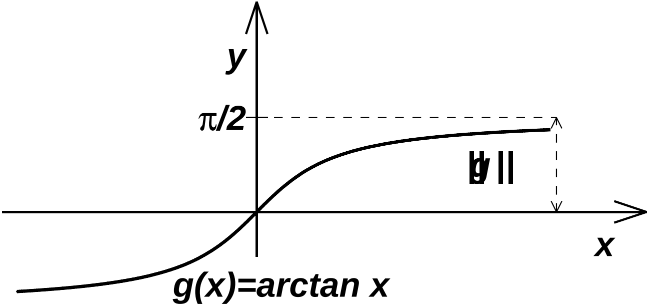

Abbildung 3.4: $||g||_\infty$, **Supremumsnorm von** $g : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = \arctan x$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

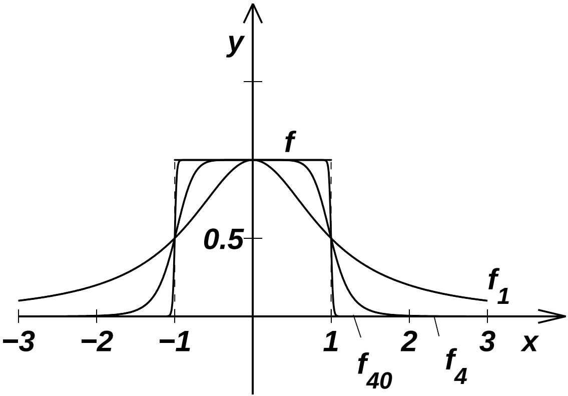

Abbildung 3.7: Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$ und Grenzfunktion f

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.7: (gleichmäßige Konvergenz) Eine Funktionenfolge (f_n) auf D konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f auf D, wenn von einem Index n_0 an alle Funktionen $f_n - f$ beschränkt sind und

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

gilt. In diesem Falle schreibt man auch kürzer

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \qquad \text{oder} \qquad f_n \to f \text{ für } n \to \infty.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.13: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) Eine Funktionenfolge (f_n) auf D ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$||f_n - f_m||_\infty < \epsilon.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.14: (Stetigkeit der Grenzfunktion) Jede gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat eine stetige Grenzfunktion f.

Anders ausgedrückt; mit $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in D$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x_k)).$$