Analyis II
TUHH
VL 10, 16. Juni 2016

Funktionenfolgen

Michael Hinze

Seien $f_k : I \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ Funktionen. Dann heißt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge.

Konvergenzarten von Funktionenfolgen

i.) Punktweise Konvergenz; wir sagen, dass (f_k) punktweise gegen f konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall_{x\in I}$$

Bsp: i) $f_k(x) := \dfrac{1}{1+x^{2k}}$, $x \in I := [-2,2]$ und $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+x^{2k}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x|<1 \\ \tfrac{1}{2}, & \text{falls } |x| = 1 \text{, d.h. } x \in \{1,-1\} \\ 0, & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$

$=: f(x)$ nicht stetig!

ii) $f_k(x) := kx(1-x)^k$, $x \in I := [0,1]$. Dann $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \qquad \forall_{x\in I}$

Abstand von Funktionen zueinander: seien f und g Funktionen von $\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$.

$$\operatorname{dist}(f,g) := \|f-g\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)|$$

Def. (gleichmäßige Konvergenz von (f_k)): Wir sagen dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f: I \to \mathbb{R}$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

Notation: $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ meint gleichmäßige Konvergenz

Beachte: Punktweise Konvergenz impliziert nicht gleichmäßige Konvergenz, denn betrachte $f_k(x) := x^k$, $x \in [0,1]$. Dann $f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Aber $\lim_{k\to\infty} f_k \neq f$, denn

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x^k - \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x\in[0,1) \end{cases} \right| \overset{x=\frac{k}{k+1}}{\geq} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \left(\tfrac{k}{k+1}\right)^k - 0 \right| = \frac{1}{e}$$

Also kann nicht $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gelten!

Weiteres Bsp hierzu: $f_k(x) := kx(1-x)^k$ $x \in [0,1]$. Dann $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 =: f(x)$ $\forall x \in [0,1]$. Aber $\lim_{k\to\infty} f_k \neq 0$, denn

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |kx(1-x)^k| \overset{,\, x=\frac{1}{k}}{\geq} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sup_{k\in\mathbb{N}} (1-\tfrac{1}{k})^k}_{\to \frac{1}{e}\ (k\to\infty)} > 0$$

Frage: Übertragen sich Eigenschaften der f_k auf die Grenzfunktion f, falls $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, d.h. falls gleichmäßige Konvergenz vorliegt?

Dazu geben wir an das Cauchy Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{gdw} \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0} : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gdw $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge bzgl $\|\cdot\|_\infty$.

Nachweis: "$\Longrightarrow$" Sei $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. Dann gilt

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \|f_m - f\|_\infty + \|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (m,n\to\infty)$$

"$\Longleftarrow$" $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CF bzgl $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $\|f_m - f_n\|_\infty \longrightarrow 0$ $(m,n\to\infty)$

Dann ist für $x\in I$: $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ CF in $\mathbb{R}$, d.h.

$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert in $\mathbb{R}$. Setze $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall_{x\in I}$

Mit diesem f gilt

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in I} |f_m(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \quad \forall_{n\geq n_0}$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

Hauptsatz: $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ und f_k stetig $\forall k$. Dann ist f stetig

Nachweis: f stetig in x heißt: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{|x-\xi|<\delta} : |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon>0$ gg. Dann gilt $\xi\in B_\delta(x)$.

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| \underset{<\varepsilon}{=} (1) + (2) + (3)$$

$n \geq n_0$: ① und ③ $< \frac{\varepsilon}{3}$

② $< \frac{\varepsilon}{3}$ weil f_n stetig $\forall n$. $\boxtimes$

Analyis II
TUHH
VL 10, 17. Juni 2016

Funktionenfolgen

Michael Hinze

Seien $f_k : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge. Funktionenfolgen induzieren reelle Folgen $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in I$.

Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen

1.) Punktweise Konvergenz; verlange $f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \quad \forall_{x\in I}$

Bsp i.) $f_k(x) := \dfrac{1}{1+x^{2k}} \qquad x \in [-2,2] = I, \quad k\in\mathbb{N}$

Es gilt
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to} \frac{1}{1+x^{2k}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x|>1 \\ 1/2, & \text{falls } x\in\{-1,1\} \\ 1, & \text{falls } |x|<1 \end{cases} =: f(x)$$

f ist nicht stetig, aber alle f_k sind stetig!

ii) $f_k(x) := kx(1-x)^k$ für $x\in I := [0,1]$. Dann $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \quad \forall_{x\in I}$.

2) Abstand von Funktionen, gleichmäßige Konvergenz

Def.: $f: I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$. Dann $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$ Supremumsnorm von f

<u>Def.:</u> $f,g : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\operatorname{dist}(f,g) := \|f-g\|_\infty \qquad \text{Abstand zwischen } f \text{ und } g$$

<u>Bsp:</u> $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$ und $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $\quad \operatorname{dist}(f,g) = 1$

<u>Def.:</u> Wir sagen, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert, falls

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| = 0$$

Notation $\lim_{k\to\infty} f_k = f$

Wir folgern: (f_k) gleichmäßig konvergent, dann auch punktweise konvergent, denn

$$|f_k(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \text{ also}$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

<u>Aber</u> punktweise induziert nicht notwendig gleichmäßige Konvergenz, denn betrachte

a) $f_k(x) := x^k$, $x \in I = [0,1]$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$.

Aber

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x^k - \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x\in[0,1) \end{cases} \right| \overset{x = \frac{k}{k+1}}{\ge} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \right| \overset{\text{SgL}}{=} \frac{1}{e}$$

Damit kann <u>nicht</u> $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ gültig sein

b) $f_k(x) = kx(1-x)^k$, $x \in [0,1]$. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$. Aber

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |kx(1-x)^k| \overset{x=\frac{1}{k}}{\ge} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \right| \longrightarrow \frac{1}{e} \quad (k\to\infty)$$

Damit kann nicht $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ gelten!

Das Cauchy-Konvergenzkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{gdw} \quad \overbrace{\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0} : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon}^{=:(*)}$$

Nachweis: "$\Rightarrow$" $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Dann $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \underbrace{\|f_m - f\|_\infty}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} + \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\xrightarrow{n\to\infty}}$

"$\Leftarrow$" Sei (f_k) Cauchy Folge bzgl $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $(*)$ ist erfüllt. Dann ist für jedes $x\in I$ auch $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folge reeller Zahlen. Also existiert $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) =: f(x)$. Mit diesem f gilt

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \quad \forall_{n\geq n_0} \text{ wegen } (*).$$

also: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$! $\boxed{}$

Hauptsatz: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ und $f_k : I \to \mathbb{R}$ sei stetig $\forall k\in\mathbb{N}$. Dann ist auch f stetig auf I. Wir zeigen Stetigkeit in x

Nachweis: Zeige: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{\xi \text{ mit } |x-\xi|<\delta} : |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| =: ① + ② + ③ < \varepsilon$$

Wir haben

$n \geq n_0$: ①, ③ $< \varepsilon/3$

② $< \varepsilon/3$, da f_n stetig, d.h. f stetig! $\boxed{}$