Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

WiSe 2015/2016

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Buch Kap. 2.17 – Numerische Integration, Fehler

Satz 2.46: (Quadraturfehler) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ mit $x_j = a + jh$ und $h := \frac{b-a}{n+1}$ unterteile $[a, b]$. Dann gelten die Fehlerdarstellungen

Ist f in $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} f(x_{k+1}) - \int_a^b f(x)dx = f'(\xi)\frac{(b-a)h}{2} \text{ (Summierte Rechteck Regel).}$$

Ist f in $[a, b]$ 2mal stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} - \int_a^b f(x)dx = f^{(2)}(\xi)\frac{(b-a)h^2}{12} \text{ (Summierte Trapez Regel).}$$

Ist f in $[a, b]$ 4mal stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) + 4f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}) + f(x_{k+1})}{6} - \int_a^b f(x)dx = f^{(4)}(\xi)\frac{(b-a)h^4}{180}$$

(Summierte Simpson Regel, auch Keplersche Faßregel genannt).

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Gegeben: Datenpaare $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$.

Gesucht: Möglichst einfaches Datenmodell in Form einer Funktion $p(x)$, welches

$$p(x_i) = f_i \text{ für } i = 0, \ldots, n$$

erfüllt.

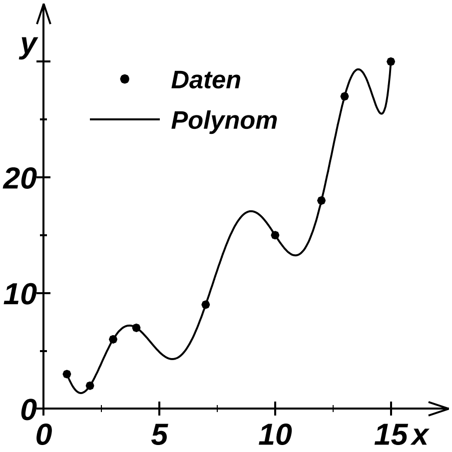
Hintergrund: Die Werte f_i ($i = 0, \ldots, n$) stammen häufig selber von einer i.d.R. unbekannten Funktion $f(x)$, die es zu modellieren gilt.

Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Gesucht: Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Buch Kap. 2.18 – Interpolation



Interpolation mit Polynom 8ten Grades

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Hintergrund: Die Werte f_i ($i = 0, \dots, n$) stammen häufig selber von einer i.d.R. unbekannten Funktion $f(x)$, die es zu modellieren gilt.

Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Gesucht: Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Lösung: $p(x_i) = f_i$ für $i = 0, \dots, n$ gdw

$$\begin{pmatrix} 1 x_0 x_0^2 \dots x_0^n \\ 1 x_1 x_1^2 \dots x_1^n \\ \dots \\ 1 x_n x_n^2 \dots x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix, falls alle x_i paarweise verschieden.

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Verbesserter Ansatz: Nutze Kenntnis von $x_0, \dots, x_n$ aus!
Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

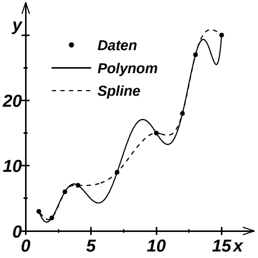
$$\begin{aligned} p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

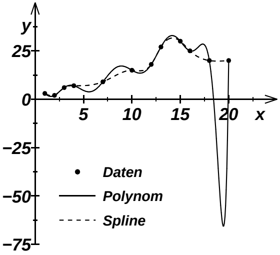
Gesucht: Koeffizienten $b_0, b_1, \dots, b_n$. Lösung:

$$\begin{aligned}
f_0 &= p(x_0) = b_0 \\
f_1 &= p(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
f_2 &= p(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\dots \\
f_n &= p(x_n) = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + \\
&\quad + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Gestaffeltes lineares Gleichungssystem; Berechne zuerst b_0, mit dessen Kenntnis b_1, mit dessen Kenntnis b_2 uswusf bis b_n.

Buch Kap. 2.18 – Vor-/Nachteile Interpolation





Links: Abb. 2.70: Kubischer interpolierender Spline und Interpolationspolynom 8. Grades.

Rechts: Abb. 2.71: Kubischer interpolierender Spline und Interpolationspolynom 11. Grades

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Methode	Vorteil	Nachteil
Lagrange	leichte Berechenbarkeit geschlossene Formel	Neuberechnung bei Hinzu-nahme von Stützstellen, starke Oszillationen bei mehr als 10 Stützstellen.
Newton-	leichte Berechenbarkeit geschlossene Formel, einfache Erweiterung bei Stützstellenhinzunahme	starke Oszillationen bei mehr als 10 Stützstellen.
Spline	keine ”unnatürlichen” Oszillationen	keine geschlossene Formel, Berechnungsaufwand