**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg**

Dr. H. P. Kiani

# Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 9

## 09/10.06.2016, SoSe 2016

## Interpolation

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig. Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden mündlich während der Veranstaltung angesagt.

# Letzte Vorlesung Numerische Integration

Berechne Näherung für $\int_a^b f(x)dx$.

Führe Zerlegung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ ein.

Ersetze $f$ auf Teilintervallen durch einfacheres Modell.

Führe Integration näherungsweise durch Integration der einfacheren Funktion(en) durch.

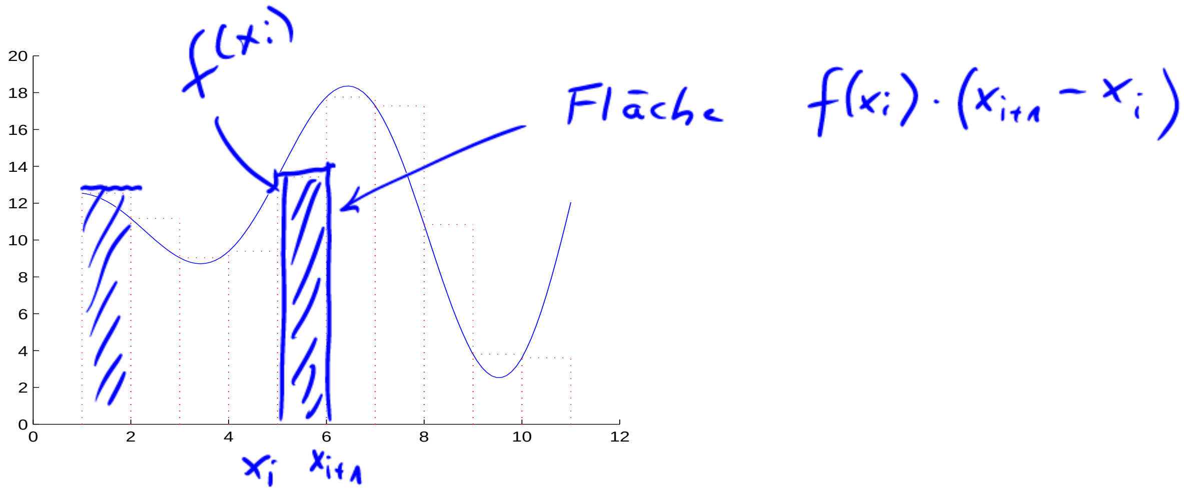



Abbildung 1: Rechteck Regel für $f(x) = x\cos(x) + 12$.

## Rechteck Regel

Ersetze $f$ auf $[x_i, x_{i+1}]$ durch Polynom nullten Grades mit $p(x_i) = f(x_i)$

Insbesondere auf $[x_0, x_1]$ erhält man $\boxed{p_0(x) = f(x_0)}$

$$\boxed{Q_1(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)}$$

Wichtig: Ist $Q(f)$ Näherung für $\int_a^b f(x)dx$, so sollte

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Q(f) \right|$$

kontrollierbar sein!

$$\int_{a = x_0}^{b = x_{n+1}} f(x)dx - Q_1(f) = \sum_{i=0}^{n} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right)$$

Betrachte ein Teilintervall: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = ?$

$\int_t^s 1 \cdot f(x)dx = f(t)(s-t) - ?$

$\int_t^s \varphi' \cdot f(x) = [\varphi \cdot f]_t^s - \int_t^s \varphi \cdot f'$

$= \varphi(s)f(s) - f(t)\varphi(t) - \int_t^s \varphi \cdot f' dx$

Es ist $f(t)(s-t) = f(x)(-(s-x))|_t^s$

$\varphi(t) = -(s-t)$ Versuch $\varphi(x) = -(s-x)$

Idee: Setze $\phi(x) = -(s-x)$

$\varphi'(x) = 1$

$\int_t^s 1 \cdot f(x)dx \overset{\circledast}{=} f(t)(s-t) - \int_t^s f'(x)(-(s-x))dx$

$\circledast \; [\varphi \cdot f]_t^s = -(s-s)f(s) - f(t)\left(-(s-t)\right)$

$= 0 + f(t)(s-t)$

$\int_t^s f(x)dx - f(t)(s-t) = \int_t^s f'(x)\underbrace{(s-x)}_{\geq 0}dx$

$\overset{MWS}{=} f'(\xi_i) \int (s-x)dx = f'(\xi_i)\left[\frac{-(s-x)^2}{2}\right]_t^s$

$= \frac{f'(\xi_i)}{2}(s-t)^2$ mit $s = x_{i+1}$, $t = x_i$

Auf jedem Intervall:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f'(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\overset{x_{i+1}-x}{\cancel{x - x_i}})dx = \frac{f'(\xi_i)}{2}\left[-(x_{i+1}-x)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \cancel{f'(\xi_i) \left[\frac{(x - x_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}} = f'(\xi_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}$$

Also

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \leq \max_{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(\xi_i)| \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}$$

Bei äquidistanter Unterteilung: $h := \frac{b-a}{n+1}$, $x_i := a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(x_i)\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h} = f'(\xi_i) \frac{h^2}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx - Q_1(f) = \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i) \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i) \qquad h = \frac{b-a}{n+1}$$

$$= \frac{h}{2}(b-a) \frac{\sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i)}{n+1} = \frac{h}{2} \cdot (b-a) f'(\xi)$$

mit einem $\xi \in [a,b]$

Mittelwert

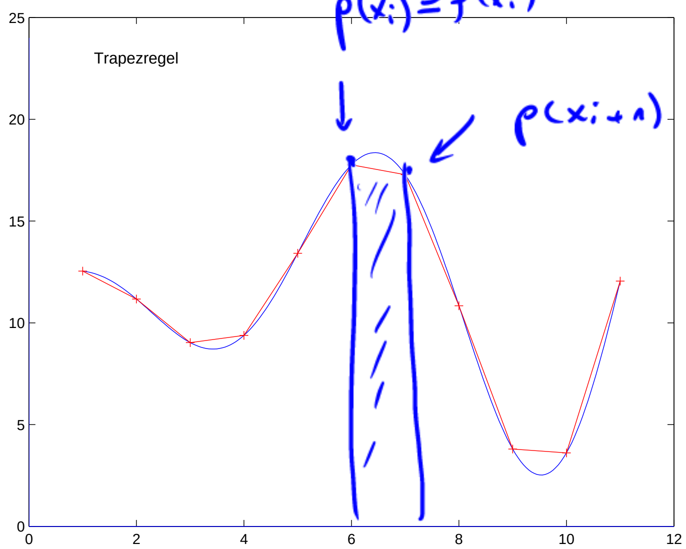
Modellverbesserung: Verwende Polynome ersten Grades statt Polynome nullten Grades auf Teilintervallen

## Trapezregel

Fordere: $p(x_i) = f(x_i)$
und $p(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$

Auf $[x_0, x_1]$
also $p_1(x_0) = f(x_0)$
und $p_1(x_1) = f(x_1)$

$p(x_i) = f(x_i)$ $p(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$




$$\boxed{p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)}$$

$p_1(x_0) = f(x_0) + \frac{\text{----}}{x_1 - x_0}(x_0 - x_0) = f(x_0)$

$p_1(x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\cancel{(x_1 - x_0)}} \cdot \cancel{(x_1 - x_0)}$
$= f(x_1)$

Andere Darstellung :

$$\boxed{p_1(x) = f(x_0)\underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} + f(x_1)\underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}}$$

Zähler sorgt für 0 bei $x = x_1$
Nenner " " 1 bei $x = x_0$

0 bei $x = x_0$
1 bei $x = x_1$

Nimmt man Polynome zweiten Grades auf den Intervallen $\overbrace{\quad}^{p^{[1]}}\overbrace{\quad}^{p^{[2]}} \cdots$ ($x_0$, $x_2$, $x_4$)

$$[x_0, x_2],\ [x_2, x_4], \cdots, [x_{2m-2}, x_{2m}] \qquad \text{mit } n+1 = 2m\,,$$

und bestimmt diese so, dass die **Interpolationseigenschaft**

z.B auf $[x_0, x_2]$
$p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$

$$p^{[k]}(x_{2k-2}) = f(x_{2k-2})\,, \quad p^{[k]}(x_{2k-1}) = f(x_{2k-1})\,, \quad p^{[k]}(x_{2k}) = f(x_{2k})$$ $f(x_2) = p(x_2)$

gilt, und bestimmt analog eine Näherung für das Integral. So erhält man die **Simpson-Regel**

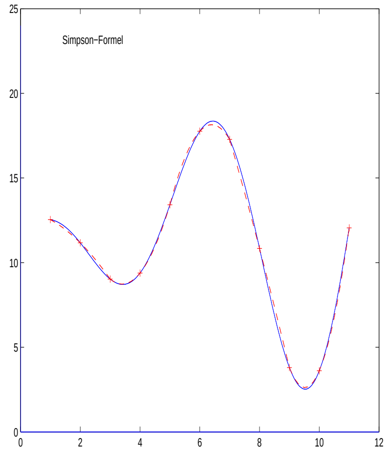



Abbildung 2: Simpson-Regel bei $f(x) = x\cos(x) + 12$

Auf dem Intervall $[x_0, x_2]$ mit den **Stützstellen**

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)).$$

erhält man das (eindeutige) **interpolierende Polynom** $p_2 \in \Pi_2$

$$\boxed{p_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}}$$

$$p_2(x) = f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{0 \text{ für } x_1, x_2} + f(x_1)\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{0 \text{ für } x_0, x_2} + f(x_2)\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{0 \text{ für } x_0, x_1}$$

$L_0$ $\qquad L_1 \qquad L_2$

$$p_2(x_0) = f(x_0)\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\cdot 0 + f(x_2)\cdot 0$$

Analog $\quad p_2(x_1) = f(x_0)\cdot 0 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 0 = f(x_1)$

$p_2(x_2) = \ldots$

Allgemein: Gegeben sind Datenpaare

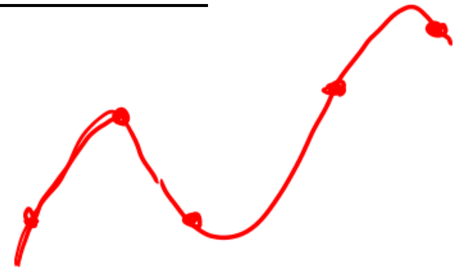
$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots, (x_n, y_n) \qquad \underbrace{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n}_{\text{insbesondere paarweise verschieden}}.$$

Gesucht: Polynom

$$p_n : [x_0,\, x_n] \to \mathbb{R},\ \text{mit}\ p(x_i) = y_i\,, \quad i = 0, 1, \cdots, n\,.$$

Man sagt dann $p$ interpoliert die Daten $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \cdots, x_n$.

## Langrangesche Darstellung von Interpolationspolynomen



Für die **Lagrange Polynome**

$$L_i(x) := \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

gilt $\quad L_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j\,, \\ 1 & i = j\,. \end{cases}$

Für das Polynom $\boxed{p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i}$ gilt

$$p_n \in \Pi_n, \qquad p_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n\,.$$

**Beispiel:** Datenpaare $(1,1),(3,2)$. Bestimme Interpolationspolynom $p_1$.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |

$$y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$p_1(x) = 1\,\frac{x-3}{1-3} + 2\,\frac{x-1}{3-1} = \frac{2x-2-x+3}{2} = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

Zusätzliches Datenpaar: $(2,3)$. Bestimme Interpolationspolynom $p_2$ zu $(1,1),(3,2),(2,3)$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

$$p_2(x) = y_0\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)} + y_2\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 1\,\frac{(x-3)(x-2)}{(1-3)(1-2)} + \cancel{2}\,\frac{(x-1)(x-2)}{\cancel{(3-1)}(\cancel{3-2})} + 3\,\frac{(x-1)(x-3)}{\cancel{(2-1)}(2-3)}$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{2} + x^2-3x+2 - 3(x^2-4x+3)$$

$$= -\tfrac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 4$$

Vorteil Lagrange-Polynome: leicht einzusehen,
Nachteil: bei Hinzunahme weiterer Daten muss alles neu berechnet werden.

Alternatives Vorgehen: Das eindeutige Polynom nullten Grades, dass $f(x_0)$ exakt wiedergibt, ist

$$\boxed{p_0(x) = f(x_0)\,.}$$

Wir addieren ein Term ersten Grades, so dass auch $x_1$, $f(x_1)$ interpoliert wird.

Dieser neue Term soll den Wert bei $x_0$ nicht kaputt machen, daher der Ansatz

$p_1(x_0) = p_0(x_0) + \dots = f(x_0) + 0$

$$p_1(x) = p_0(x) + \alpha(x - x_0) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

Die Forderung $p_1(x_1) = f(x_1)$ liefert

$$p_1(x_1) \overset{!}{=} f(x_1) \overset{!}{=} f(x_0) + \alpha(x_1 - x_0) \iff \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\iff p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} =: [x_1 x_0]$ heißt **dividierte Differenz 1.Ordnung**

Zusätzlich $x_2$, $f(x_2)$ interpolieren:

$p_2(x) = p_1(x) + \beta(x - x_0)(x - x_1) \longrightarrow$ $p_2(x_0) = p_1(x_0) + 0 = f(x_0)$ ✓
$p_2(x_1) = p_1(x_1) + 0 = f(x_1)$ ✓

noch zu erfüllen $\quad p_2(x_2) \overset{!}{=} f(x_2) \overset{!}{=} p_1(x_2) + \beta(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ $\quad$ Nun noch $\beta$ bestimmen

Soll zusätzlich $f(x_2)$ exakt wiedergegeben werden, addiere ein Term zweiten Grades.

Dieser neue Term soll die exakten Werte bei $x_0$ und $x_1$ nicht kaputt machen, daher der Ansatz

$$p_2(x) = p_1(x) + \beta(x - x_0)(x - x_1) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}_{p_1(x)} + \beta(x - x_0)(x - x_1)$$

Fordere jetzt: $p_2(x_2) = f(x_2)$

Wie man z.B. durch Einsetzen prüfen kann, erhält man für $\beta$

$$\beta = \frac{\overbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}^{[x_2 x_1]} - \overbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}^{[x_1 x_0]}}{x_2 - x_0} = \frac{[x_2 x_1] - [x_1 x_0]}{x_2 - x_0} =: \underline{[x_2 x_1 x_0]}.$$

Das so erhaltene Polynom

$$\boxed{p_2(x) \;=\; f(x_0) \,+\, [x_1x_0]\,(x-x_0) \,+\, [x_2x_1x_0]\,(x-x_0)(x-x_1)}$$

ist das (eindeutige) Polynom (höchstens) zweiten Grades mit

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2.$$

**Beispiel:** Wie oben Datenpaare $(1,1), (3,2)$. Bestimme $p_1$.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = 1 + \frac{2-1}{3-1}(x-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

Zusätzliches Datenpaar: $(2,3)$. Bestimme $p_2$ zu $(1,1), (3,2), (2,3)$

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= p_1(x) + \frac{\frac{3-2}{2-3} - \frac{1}{2}}{2-1}(x-1)(x-3) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-3)$$

# Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms

Gegeben sei das Interpolationspolynom $p_n$ zu den Daten

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_n, y_n).$$

$p_n \in \Pi_n$

Gesucht sei das Interpolationspolynom $p_{n+1}$ zu den Daten

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_n, y_n),\ (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

$p_{n+1} \in \Pi_{n+1}$

IDEE : Versuche den Ansatz $\quad p_{n+1}(x) := p_n(x) + q(z).$

Wenn es einen solchen Term $q$ gibt, dann gilt einerseits

$$p_n \in \Pi_n,\ p_{n+1} \in \Pi_{n+1} \Longrightarrow q \in \Pi_{n+1}$$

und andererseits für alle $j = 0, 1, \cdots, n$

für $j = 0, 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned} y_j &\overset{!}{=} p_{n+1}(x_j) = \underbrace{p_n(x_j)}_{= y_j} + q(x_j) \\ &= y_j + q(x_j) \\ &\Longrightarrow q(x_j) = 0 \qquad \forall j = 0, 1, \cdots, n\,. \end{aligned}$$

Ein Polynom höchstens (n+1)-ten Grades mit den (n+1) Nullstellen $x_0, x_1, \cdots, x_n$ hat zwingend die Form

$$q(x) = a(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Es bleibt die Frage, ob es eine Konstante $a$ gibt, so dass

$$\underline{y_{n+1}} \overset{!}{=} p_{n+1}(x_{n+1}) = \underline{p_n(x_{n+1}) \; + \; a(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)}$$

gilt. Diese Frage läßt sich aber durch einfaches Auflösen beantworten:

$$a = \frac{y_{n+1} \; - \; p_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)}.$$

Also funktioniert unser Ansatz $\quad p_{n+1}(x) := p_n(x) + q(z).$

**Effiziente Berechnung der Koeffizienten:** Definiere

$[x_i] = y_i$ für $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ und rekursiv:

$$\boxed{[x_i, \cdots, x_k] := \frac{[x_i, \cdots, x_{k-1}] - [x_{i+1}, \cdots, x_k]}{x_i - x_k}, \qquad [x_i] = y_i\,.}$$

## SATZ : Newton Interpolationsformel

Das eindeutige Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \cdots, n$, $\quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$ hat die Form

$[x_0] + [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) \cdots$

$$\boxed{p(x) := \sum_{k=0}^{n} [x_0, \cdots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)\,.}$$

$[x_0 x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1}$

$[x_1 x_2] = \frac{[x_1] - [x_2]}{x_1 - x_2}$

Beispiel: Hörsaalübung

$[x_0 x_1 x_2] = \frac{[x_0 x_1] - [x_1 x_2]}{x_0 - x_2}$ ($i$, $k$)

$x_i$ | $y_i = [x_i]$ | $[x_i x_{i+1}]$

$1$ | $\boxed{1}$ | $\frac{2-1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$ | $\frac{-1-1/2}{2-1} = \boxed{-3/2}$ | $\frac{-5/2+3/2}{4-1} = -\frac{1}{6}$

$3$ | $2$ | $\frac{3-2}{2-3} = -1$ | $\frac{-3/2-1}{4-3} = -5/2$

$2$ | $3$ | $\frac{0-3}{4-2} = -3/2$

$4$ | $0$

$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - x_0) - \frac{3}{2}(x - x_0)(x - x_1)$ $- 1/6 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

# SATZ : Fehler der Interpolation

Sei $f \in C^{n+1}[a,b]$ und seien $x_i \in [a,b]$, $i = 0, 1, \cdots, n$ paarweise verschiedene Zahlen. Dann gilt für das Interpolationspolynom $p \in \Pi_n \;:\; p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ und $x \in [a,b]$: Es gibt ein $\xi = \xi(x)$ in $[a,b]$, so dass

$$f(x) - p(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

✓ $x = x_j$

wobei

$$\omega(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,.$$

$$\overbrace{f(x_j) - p(x_j)}^{0} = \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \cdots}_{0 \text{ für } x = x_j} = 0$$

**Beweis:** Für $x = x_j$, $j = 0, 1, \cdots, n$ ergibt Einsetzen $0 = 0$.

Für festes $x \neq x_i$ definieren wir die Funktion

$$F(z) := f(z) - p(z) - \alpha\omega(z)\,,$$

$$F(x) = f(x) - p(x) - \alpha\omega(x) \stackrel{!}{=} 0$$

so dass $F(x) = 0$ gilt. Wählen also $\alpha = \dfrac{f(x) - p(x)}{\omega(x)}$.

$$\omega(x) = \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}_{n+1 \text{ Klammern}} = x^{n+1} + \underset{\in\, \Pi_n}{\tilde{p}(x)}$$

$$\omega^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1}\right) = (n+1)!$$

Dann hat $F$ mindestens (n+2) Nullstellen und damit (Rolle) $F^{(n+1)}$ mindestens eine Nullstelle $\xi$ in $[a, b]$: $p \in \Pi_n \Longrightarrow p^{(n+1)}(x) = 0$

$$F^{n+1}(\xi) \;:=\; f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p^{(n+1)}(\xi)}_{0} - \alpha\underbrace{\omega^{(n+1)}(\xi)}_{(n+1)!} \;=\; f^{n+1}(\xi) - \underline{\alpha(n+1)!} \;=0.$$

Damit erhält man $\alpha = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$ und wegen $F(x) = 0$:

$$0 = F(x) \;:=\; f(x) - p(x) - \alpha\omega(x) \iff \boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)\,.} \qquad \square$$

Insbesondere also

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{n+1}(\xi)|$$

Interpoliert man große Datenmengen $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\cdots$ , $(x_n, y_n)$ mit Polynomen hohen Grades, so stellt sich oft ein unerwünschtes oszillatorisches Verhalten ein. Die Interpolation der Daten

$$x_j = -5 + j, \quad y_j = \frac{1}{1 + x_j^2}, \qquad j = 0,\ 1,\ \cdot,\ 10$$

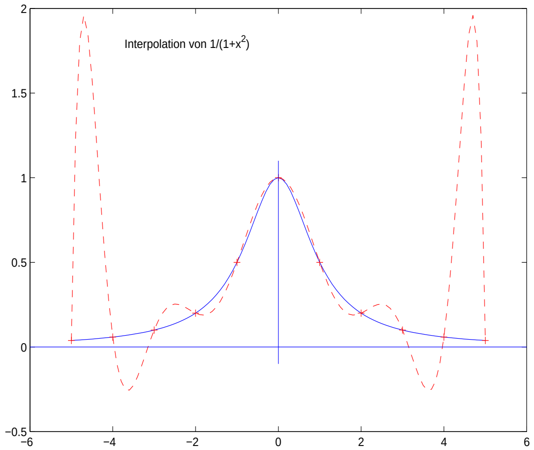



Abbildung 3: exakt: durchgezogen, Interpolation: gestrichelt

Als Alternative zur Interpolation mit einem Polynom hohen Grades bieten sich sogenannte **Splines** an. Man zerlegt das Intervall :

$$Z_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

in $n$ Teilintervalle

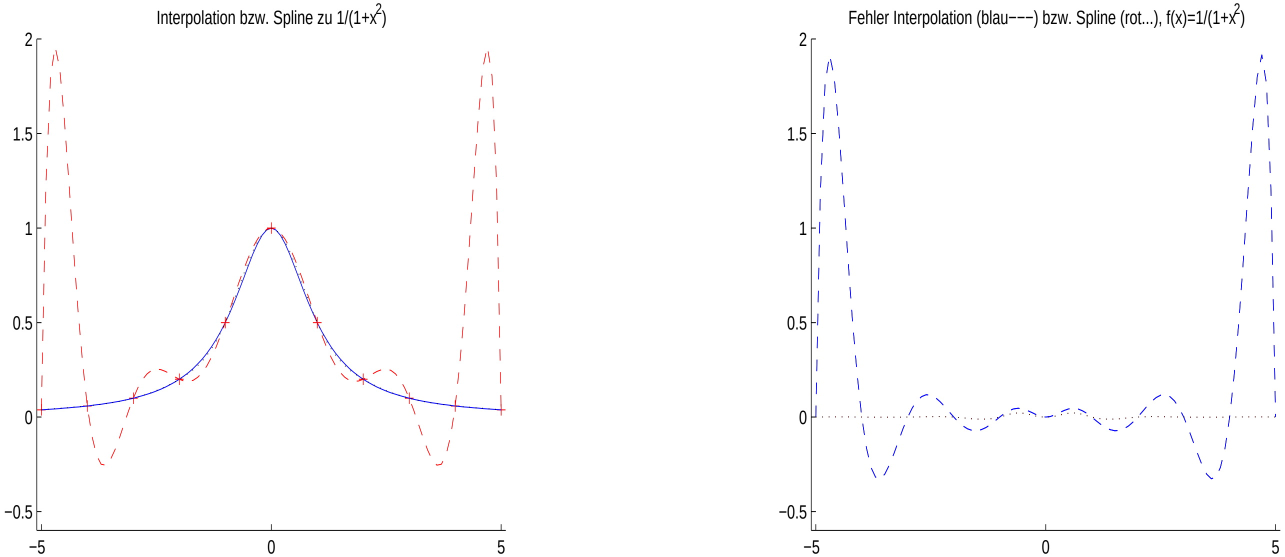
$$I_j := [x_{j-1}, x_j], \qquad j = 1, 2 \cdots , n \,,$$

bestimmt auf jedem Teilintervall eine polynomiale Näherung vom Grade $m$

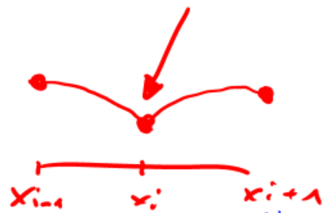
Trapezregel $m=1$

und verlangt, dass die zusammengesetzte Funktion auf dem gesamten Intervall mindestens (m-1) Mal stetig differenzierbar ist.

0 mal stetig diffbar, also stetig




nicht erlaubt




Kubischer Spline
Auf Teilintervall:
Polynom 3-ten
Grades. Insgesamt
2 Mal stetig diffbar. Also
an den
Endpunkten der Teil-
intervalle keine
Sprünge der ersten
und zweiten Ableit.

Abbildung 4: exakt: durchgezogen, Interpolation: gestrichelt, Spline: gepunktet

Wichtig: lineare Splines ($\rightarrow$ Trapezregel) und kubische Splines.

Berechnung: per Computer, z.B. Matlab