Analyis II
TUHH
VL 8, 2. Juni 2016

Skalares Kurvenintegral

Michael Hinze

Krümmung einer ebenen Kurve

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}_1(t)\,\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\,\dot{x}_2(t)}{\|\dot{r}(t)\|^3}$$

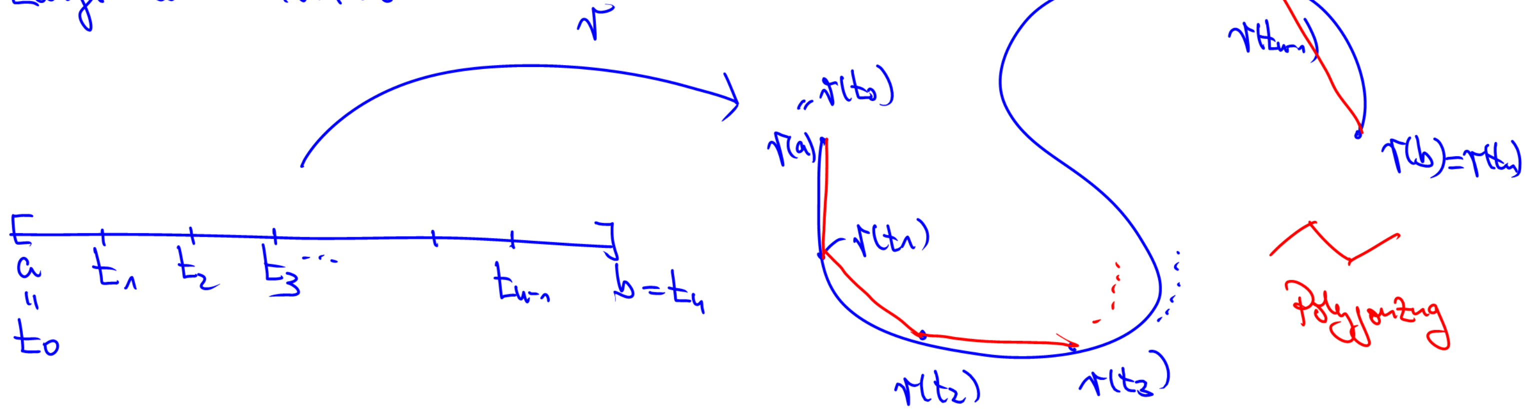
Bsp: $r(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} \rightarrow \kappa(t) = \dfrac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^{\,3}}$

Merkregel: $f'(t)$ "klein", dann $f'(t)^2$ erst recht "klein", also in diesem Fall

$$\kappa(t) \approx f''(t)$$

gutes Maß für Krümmung (etwa eines Stabes)

Länge einer Kurve



Kurvenlänge $= s(b) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ = Länge Polygonzug

Es gilt: $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \dot\gamma(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$ mit $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$, falls γ diffbar. Also

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \|\dot\gamma(\xi_i)\|(t_{i+1} - t_i) \quad \text{und}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\dot\gamma(\xi_i)\|(t_{i+1} - t_i) = \text{Riemannsumme von } \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

Also: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diffbar. Dann

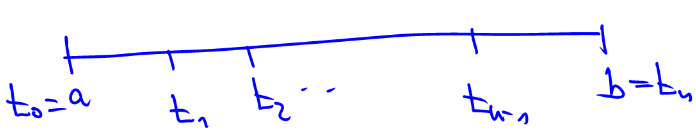
$$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt \quad \text{Länge der Kurve.}$$

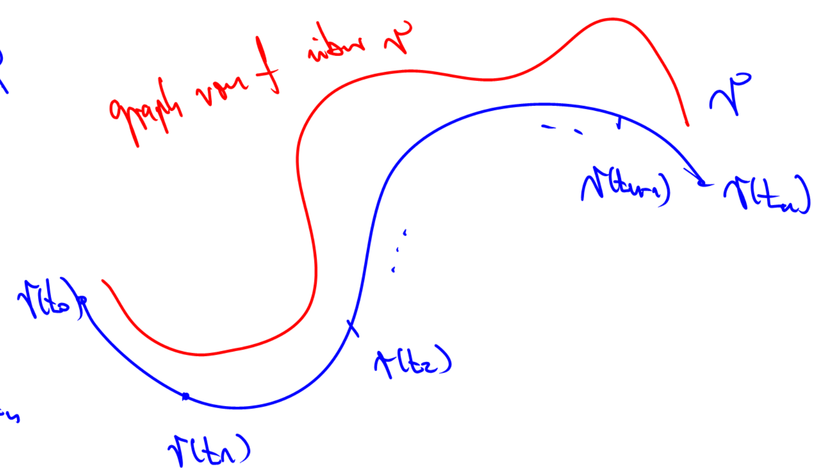
Beachte: Kurven, für die $\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert (unabhängig von der Unterteilung $t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$) heißen rektifizierbar.

Bsp: $\gamma(t) = R\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$ $\quad \dot\gamma(t) = R\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$, $\|\dot\gamma(t)\| = R$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = 2\pi R$$

Skalares Kurvenintegral





Analog zum Riemann-Integral definieren wir Riemann-Summe

$$\circledast = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\,\Delta s_i \qquad \text{mit } \Delta s_i := s(t_i)-s(t_{i-1})$$

Wir wissen: $\Delta s_i \approx \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| = \|\dot\gamma(\xi_i)\|\,(t_i-t_{i-1})$

$\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$

Damit

$$\circledast \approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\,\|\dot\gamma(\xi_i)\|\,(t_i-t_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\xi_i))\,\|\dot\gamma(\xi_i)\|\,(t_i-t_{i-1})$$

$$= \text{Riemann Summe von } \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

__Def__: Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ diffbare Kurve

Dann heißt

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

skalares Kurvenintegral von f.

__Bsp 1__: $f(x,y) = x^2-y^2$, $\quad \gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto R\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = R$$

$$f(\gamma(t)) = (R\cos t)^2-(R\sin t)^2 = R^2\cos 2t$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} R^2\cos 2t\,R\,dt = 0$$

__Bsp 2__: $f(x,y,z) = c\left[1+\cos\left(4\arctan\frac{y}{x}\right)\right]$

$$\gamma(t) = R\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\cos t\\ \cos\frac{\pi}{4}\sin t\\ \sin\frac{\pi}{4}\end{bmatrix} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$R = 6370\,\mathrm{km}$, γ Parametrisierung eines $1/4$ Breitenkreises auf Höhe

Mitteleuropa - Nordamerika

Damit $\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $f(\gamma(t)) = c\,[1+\cos(4t)]$

$$\int_\gamma f\,ds = \frac{R}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} c\,[1+\cos(4t)]\,dt = \frac{c\,R}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2}$$

Numerische Integration

Frage: Kann ich $\int_a^b f(x)\,dx$ (näherungsweise) ausrechnen, wenn kein Stammfunktion zu f kenne? z Bsp für $f(x) = e^{-x^2}$.

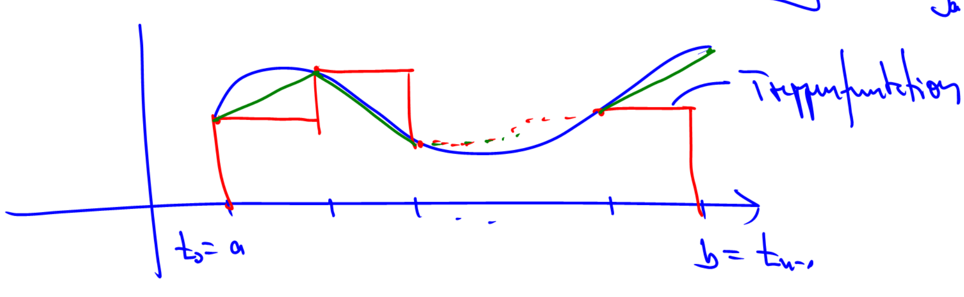
Ja! Mit Hilfe numerischer Integration

Gehe zurück zur Definition des Integrals: $a = t_0 < \dots < t_{n+1} = b$

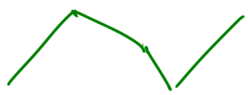
$$\int_a^b f(x)\,dx \;\xleftarrow[\text{Feinheit gegen Null}]{n\to\infty}\; \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\,(t_{i+1}-t_i)$$

Riemannsumme mit $\xi_i = t_i$ konvergiert gegen $\int_a^b f(x)\,dx$, falls f R-integrierbar!

Fasse also Riemannsumme mit $\xi_i = t_i$ als Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ auf!



Idee hier: Kompliziertes, komplexes f durch einfaches Objekt, hier Treppenfunktion, ersetzt und dann Integral der Treppenfunktion als Näherung auffassen für $\int_a^b f(x)\,dx$!



Stückweise lineare, stetige Approximation von f

Es gilt mit $t_i = a + i\,\frac{b-a}{n+1}$, $i = 0, \dots, n+1$ äquidistante Unterteilung

$$\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(t_i)(t_{i+1}-t_i)}_{\text{Rechteck Regel}} = \frac{1}{2} f'(\xi)\,\frac{b-a}{n+1}\,(b-a) \qquad \xi \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\big(f(t_{i+1})+f(t_i)\big)(t_{i+1}-t_i)}_{\text{Trapez Regel}} = -\frac{1}{12} f''(\xi)\left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 (b-a)$$

mit $\xi \in [a,b]$.

Analyis II

TUHH

VL 8, 3. Juni 2016

Skalares Kurvenintegral

Michael Hinze

Bspe zur Krümmung $\qquad \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2$$

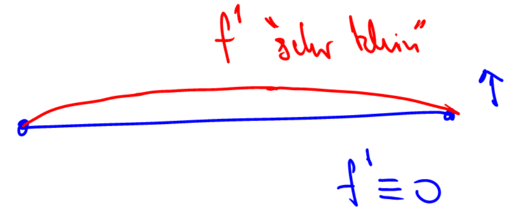
i) $\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

Also

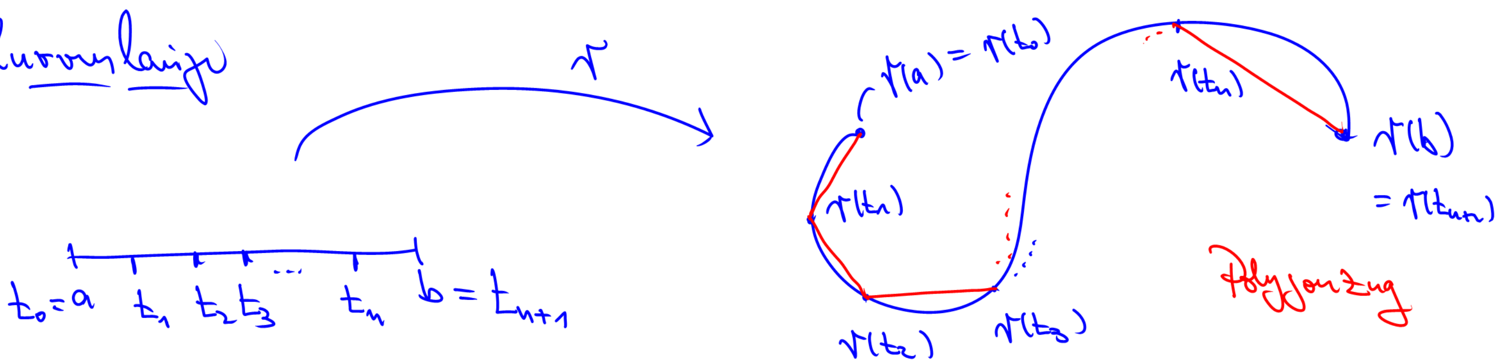
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^{\,3}}$$

Bemerke: Bei der Auslenkung eines eingespannten Balkens aus der Ruhelage ist

$$\kappa(t) \approx f''(t)$$



Kurvenlänge



$s(t) = ?$

Idee: Unterteilung immer feiner, konvergiert Länge des Polygonzugs (hoffentlich) gegen $s(b)$ (= Länge der Kurve)

$$\text{Länge Polygonzug} = \sum_{i=0}^{n} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = (*)$$

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \dot\gamma(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \quad \text{mit } \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Also

$$(*) = \sum_{i=0}^{n} \|\dot\gamma(\xi_i)\|(t_{i+1} - t_i) = \text{Riemann Summe von } \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

Also: γ stetig diffbar, dann

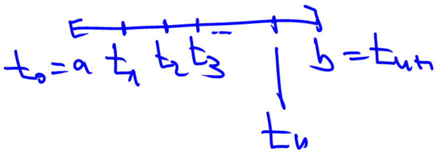
$$s(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(\tau)\|\, d\tau \quad (\text{Länge des Kurvenbogens von } \gamma(a) \text{ bis } \gamma(t)).$$

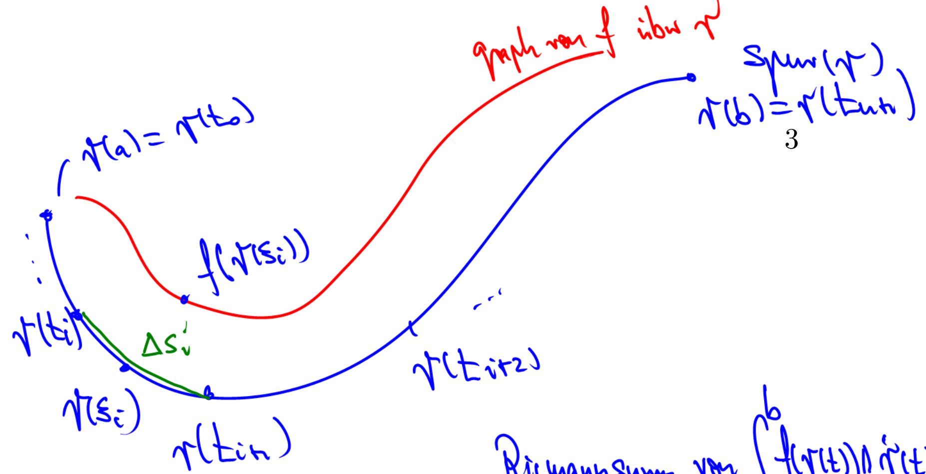
Anmerkung: Konvergiert $\sum_{i=0}^{n} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ unabhängig von der gewählten Zerlegung, so heißt γ rektifizierbar (besitzt also eine Länge). Dazu muss γ nicht diffbar sein.

Bsp: $\gamma(t) = R\begin{bmatrix}\cos t \\ \sin t\end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann $s(2\pi) = 2\pi R$

Frage 2: $f: \mathbb{R}^n \supset \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig. Was ist $\int_\gamma f\, ds$?

Skalares Kurvenintegral





$$\int_\gamma f\,ds \approx \sum_{i=0}^{n} f(\gamma(\xi_i))\,\Delta s_i \approx \overbrace{\sum_{i=0}^{n} f(\gamma(\xi_i))\,\|\dot\gamma(\xi_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)}^{\text{Riemannsumme von } \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\|\,dt},$$

denn $\Delta s_i \approx \|\dot\gamma(\xi_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)$ $\quad (= \|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)\|)$.

Def.: $$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$ Skalares Kurvenintegral bzw. Kurvenintegral erster Art

für f stetig und γ stetig diffbar.

Bsp i) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\gamma(t) = R\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}$, $t \in [0,2\pi]$

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt \qquad \|\dot\gamma(t)\| = R$$

$$f(\gamma(t)) = R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = R^2\cos 2t.$$ Also

$$\int_\gamma f\,ds = \frac{1}{2}R^2 \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

ii) $f(x,y,z) = c\left[1+\cos\left(4\arctan\frac{y}{x}\right)\right]$, $\gamma(t) = R\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\cos t\\ \cos\frac{\pi}{4}\sin t\\ \sin\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$

mit $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ ($\frac{1}{4}$ Breitenkreis Nordhalbkugel auf der Höhe von Mitteleuropa).

Es gilt $\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $f(\gamma(t)) = c[1+\cos(4t)]$

Damit $\int_\gamma f\, ds = \frac{R}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} c[1+\cos(4t)]\, dt = \frac{cR}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}$.

Numerische Integration

Motivation: $\int_a^b f(x)\, dx$ zu berechnen, aber Stammfunktion zu f nicht bekannt (z Bsp $f(x) = e^{x^2}$).

Idee: Nutze Technik des Riemann Integrals zur näherungsweisen Berechnung des Integrals.

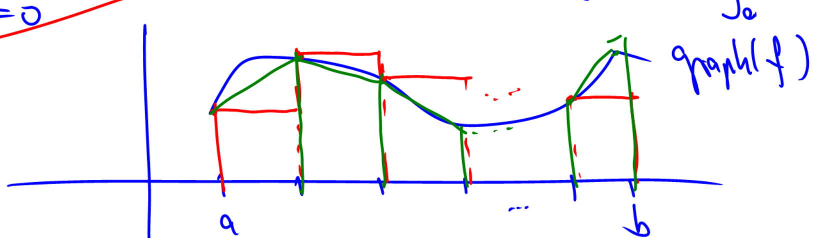
$$\int_a^b f(x)\, dx \sim \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$

Riemann Summe zur Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Also: f R-integrierbar und Unterteilung etwa äquidistant, d.h. $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n+1}$ $i = 0, \dots, n$, dann konvergiert

$$\sum_{i=0}^n f(t_i)(t_{i+1}-t_i) \text{ gegen } \int_a^b f(x)\, dx.$$

graphisch



Treppenfunktion, stückweise konstant

Fehler: $\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(t_i)(t_{i+1}-t_i)}_{\text{Rechteckregel}} = \frac{1}{2} f'(\xi) \overbrace{\frac{b-a}{n+1}}^{\to 0 \ (n\to\infty)} (b-a)$

mit $\overset{\text{linear}}{\xi} \in [a,b]$

Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f(t_{i+1})+f(t_i)\right)(t_{i+1}-t_i)$$

$$= -\frac{1}{12} f''(\xi) \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 (b-a) \quad \text{mit}$$

$$\xi \in [a,b]$$