Analyis II
TUHH
VL 7, 26. Mai 2016

Kurven

Michael Hinze

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall

$$\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \left(\equiv \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix} \right)$$

$\mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

Eine solche Abb. heißt (ebene) Kurve

Bsp i.) $\gamma(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$: Kreis mit Radius R

ii) $\gamma(t) = R \begin{bmatrix} \cos(mt) \\ \sin(mt) \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, $m \geq 2$: Kreis mit Radius R, der m-mal gegen die Uhr durchlaufen wird

γ heißt hier Parametrisierung (des Kreises), siehe Tafel.

Bei i.) und ii.) gilt: $\mathrm{spur}(\gamma)$ ist Kreis mit Radius R

In Bsp ii) wird Kreis mit "höherer Geschwindigkeit" durchlaufen als in Bsp. i).

Ziel: Länge von Kurven und skalare Kurvenintegrale

Länge von γ?

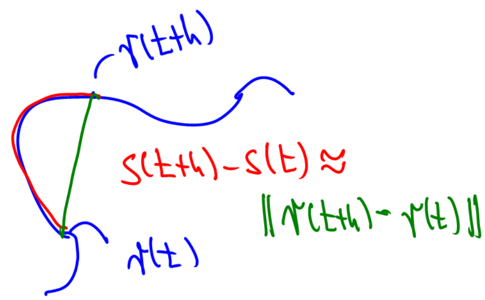
Sei $f : \gamma \to \mathbb{R}$. Was ist $\int_\gamma f \, ds$?

Vorbereitungen:

$s(t) :=$ Länge des Kurvenbogens $\gamma(a)$ bis $\gamma(t)$

Was wissen wir über die Änderung von s bzgl. t?

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} = (*)$$



Hier $\|\gamma(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$

Sei γ diffbar, d.h. jede Komponentenfunktion $x_i(t)$ sei diffbar.

Dann ist auch $t \mapsto \|\gamma(t)\|$ diffbar.

Damit in $(*)$

$$(*) = \left\| \lim \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| = \|\dot\gamma(t)\|, \quad \text{wobei}$$

$$\dot\gamma(t) := \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot x_1(t) \\ \dot x_2(t) \end{bmatrix}$$

"$\cdot$" bezeichnet die Ableitung nach der Zeit,

d.h. $$\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot x_1^2(t) + \dot x_2^2(t)}$$

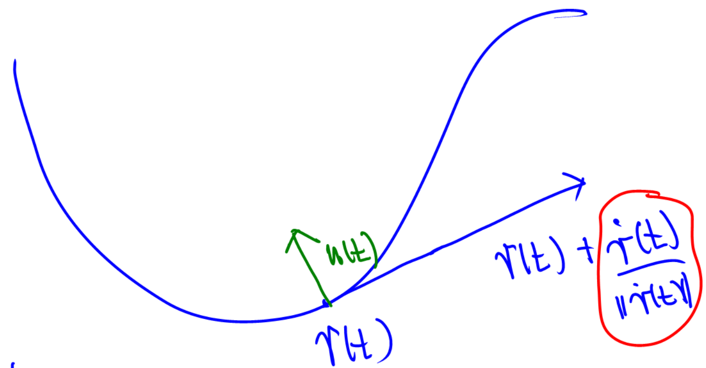
Bsp.: i) $\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$ mit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar. Dann

Spur(γ) = graph(f). Es gilt $\dot\gamma(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix}$, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+f'(t)^2}$

ii) $\gamma(t) = R \begin{bmatrix} \cos mt \\ \sin mt \end{bmatrix}$, $\dot\gamma(t) = Rm \begin{bmatrix} -\sin mt \\ \cos mt \end{bmatrix}$, $\frac{ds}{dt} = mR$

Tangenten an Kurven

$\dot\gamma(t)$ ist Tangentialvektor an die Kurve γ



Def. 1 Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ Parametrisierung einer diffbaren Kurve. Es gelte $\|\dot\gamma(t)\| > 0$ $\forall_{t\in[a,b]}$. Dann heißt γ regulär und

$\underline{t(t)} := \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$ Tangentialvektor an γ bei $\gamma(t)$.

$\underline{n(t)} := \frac{\dot t(t)}{\|\dot t(t)\|}$ heißt Hauptnormalenvektor an γ bei $\gamma(t)$ (falls γ 2 mal diffbar ist).

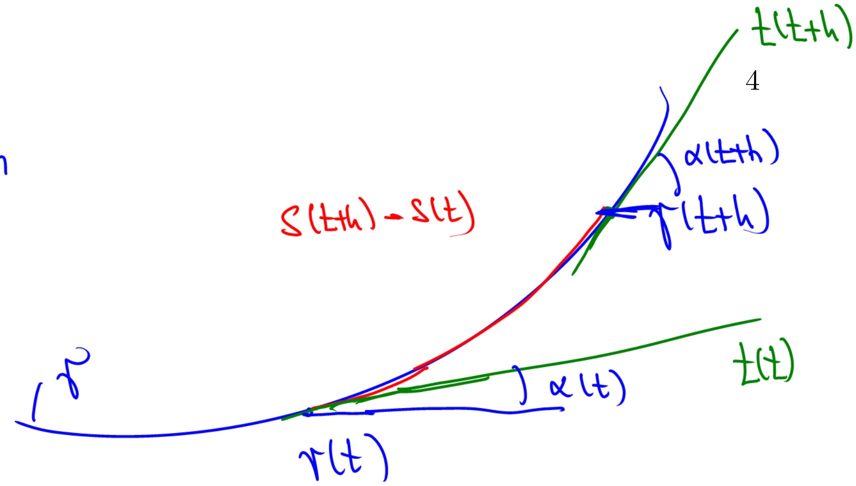
In der Ebene: $n(t)$ entsteht durch Drehung von $t(t)$ um $90°$ im mathematisch positiven Sinn.

Bsp $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ at \end{bmatrix}$ mit $a>0$
Helix mit Ganghöhe a

$\dot\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix} \to \|\dot\gamma(t)\| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+a^2}$

$\ddot\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $t(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}$, $n(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$

Krümmung von Kurven



$$K(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{s(t+h)-s(t)}$$

$$=: \frac{d\alpha}{ds}$$

Frage: Wie können wir dies in Termen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ausdrücken?

Wir haben

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot x_1^2(t) + \dot x_2^2(t)}$$

$$\tan\alpha(t) = \frac{\dot x_2(t)}{\dot x_1(t)} \longrightarrow \frac{d}{ds}\tan\alpha(t) = \frac{1}{\cos^2\alpha(t)}\frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot x_2(t)}{\dot x_1(t)}\right) = \frac{\ddot x_2(t)\dot x_1(t) - \ddot x_1(t)\dot x_2(t)}{\dot x_1(t)^2}\frac{dt}{ds}$$

d.h.
$$\frac{d\alpha}{ds} = \cos^2\alpha(t)\,\frac{\ddot x_2(t)\dot x_1(t) - \ddot x_1(t)\dot x_2(t)}{\dot x_1(t)^2}\,\frac{dt}{ds}$$

Hier $s = s(t)$ und $\frac{ds}{dt} = \|\dot\gamma(t)\| > 0$ n. Vor. Also besitzt s Umkehrfunktion $s \mapsto t(s)$ mit $t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|}$

$$\longrightarrow K(t) := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\ddot x_2(t)\dot x_1(t) - \ddot x_1(t)\dot x_2(t)}{\sqrt{\dot x_1^2(t) + \dot x_2^2(t)}^{\,3}}$$

Dabei benutzt: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\dot x_2(t)^2}{\dot x_1(t)^2}} = \frac{\dot x_1(t)^2}{\dot x_1(t)^2 + \dot x_2(t)^2}$

Analyis II
TUHH
VL 7, 27. Mai 2016

Kurven

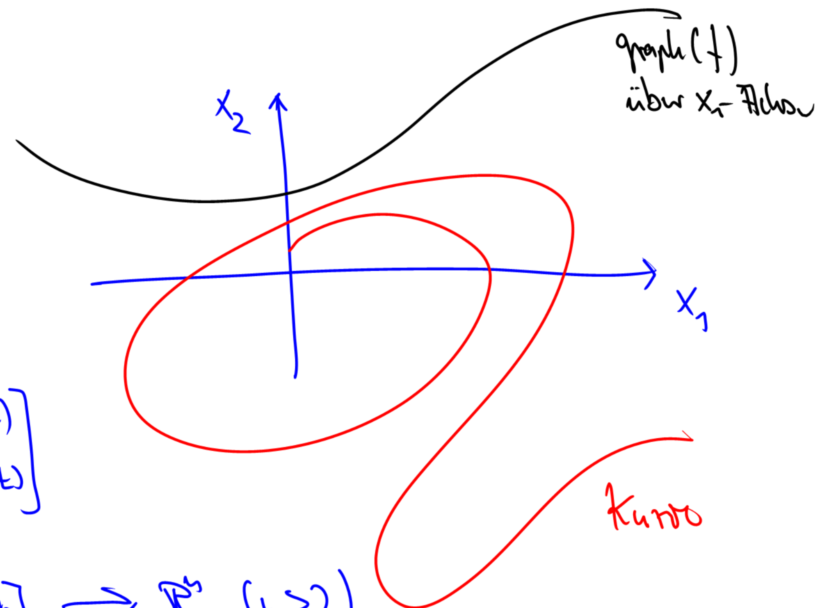
Michael Hinze

Def. 1 Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Eine Abbildung

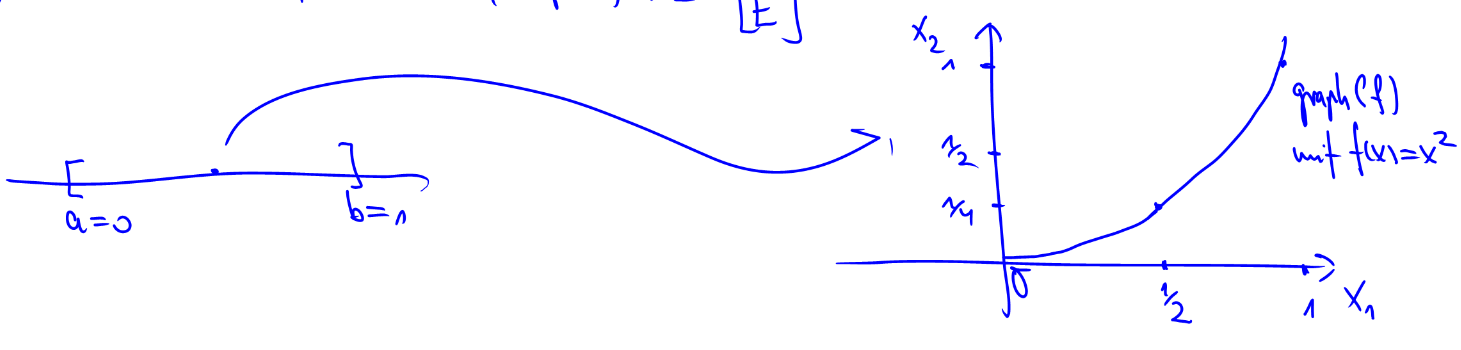
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^n)$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix}$$



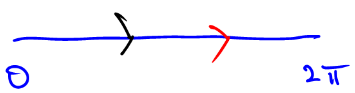
heißt ebene Kurve. Falls $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, heißt γ Kurve (im $\mathbb{R}^n$). Es gilt $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

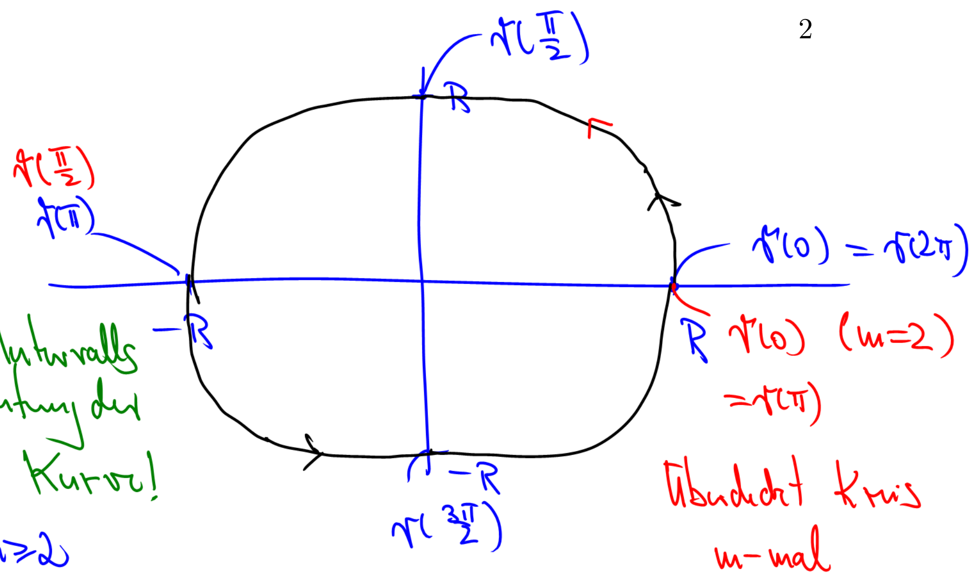
Bsp i.) $a = 0$, $b = 1$, $\gamma(t) := \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$



ii) Kreis mit Radius R $\quad \gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$





Merke: Durchlaufrichtung des Intervalls induziert Durchlaufrichtung der Kurve!

iii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto R \begin{bmatrix} \cos mt \\ \sin mt \end{bmatrix} \quad m \geq 2$$

Parametrisierung des Kreises mit Hilfe von Kurven sehr elegant möglich. Geht mit Graphen von Funktionen nicht so elegant! In unserem Beispiel ist Kreis die Spur(γ).

Ziel:

i.) Länge von Kurven berechnen

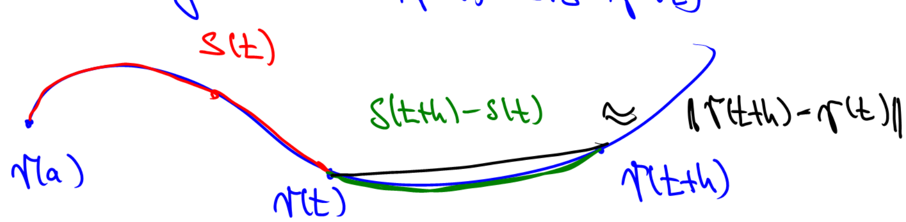
ii.) Integration von Funktionen auf Kurven $\int_\gamma f \, ds = ?$

iii.) Wie krumm sind Kurven?

Technische Hilfsmittel

a.) Wie ändert sich die Länge einer Kurve bei Durchlauf von $[a,b]$?

$s(t) :=$ Länge des Kurvenbogens von $\gamma(a)$ bis $\gamma(t)$



Frage: Was ist $\lim\limits_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t)$ in Termen von γ?

Hier $\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ $\qquad \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \text{ im } \mathbb{R}^n \right)$

Damit

$$s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|}{h} \overset{\text{Norm stetig}}{=} \left\| \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{x_1(t+h)-x_1(t)}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{x_2(t+h)-x_2(t)}{h} \end{bmatrix} \right\| \underset{\text{diffbar}}{\overset{\text{falls } x_1, x_2}{=}} \left\| \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \right\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

Konvention bei Kurven: Ableitung durch "$\cdot$" darstellen

Merke: $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$

Bsp i.) $\gamma(t) := \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$ $\qquad$ Spur(γ) = graph(f)

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

ii) $\gamma(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ $\qquad \dot{\gamma}(t) = R \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ $\qquad \|\dot{\gamma}(t)\| = R$

$\begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}$ $\qquad\qquad$ ωR

Was ist Krümmung einer Kurve?

○ krummer als

$\frac{1}{R}$ ist Kreiskrümmung

Vorlage: Parametrisierung $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei regulär, d.h. $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \quad \forall_{t \in [a,b]}$. Dann heißt

$$t(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$ Tangentialvektor an γ bei $\gamma(t)$

Es gilt $\|t(t)\| = 1$ (Länge $= 1$).

Ein Vektor $n(t)$ heißt Normalenvektor an γ bei $\gamma(t)$, falls

$n(t) \cdot t(t) = 0$ gilt, d.h. $n(t) \perp t(t)$.

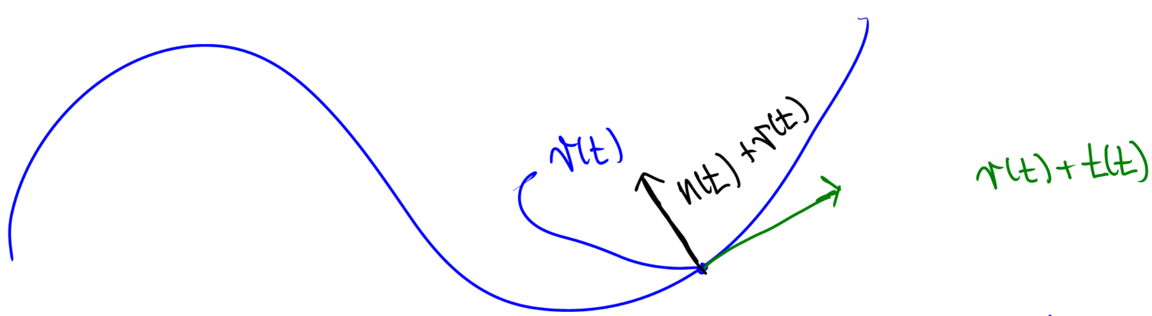
Euklidisches SKP

$$n(t) := \frac{\dot{t}(t)}{\|\dot{t}(t)\|}$$ heißt Hauptnormalenvektor an γ bei $\gamma(t)$

In der Ebene entsteht n aus t durch mathematisches positive Drehung um $90°$.

$\|t(t)\|^2 = 1 \longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\|t(t)\|^2 = 2\, t(t) \cdot \dot{t}(t)$. D.h.

$\dot{t}(t) \perp t(t)$.



Bsp $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ at \end{bmatrix}$ mit $a > 0$ Helix mit Ganghöhe a

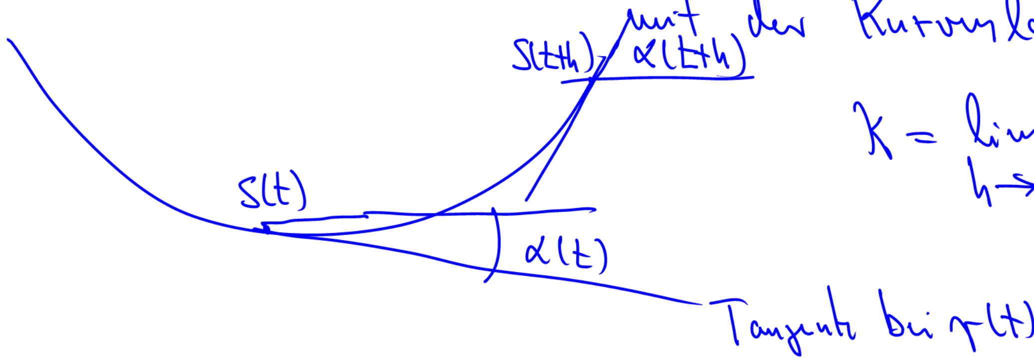
Hier gilt $\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}$, $\ddot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1+a^2} = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$t(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}, \quad n(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krümmung einer Kurve = Änderung des Tangentenanstellwinkels mit der Kurvenlänge

$$\kappa = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{s(t+h) - s(t)} = \frac{d\alpha}{ds}$$



Es ergibt sich für ebene Kurven

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}_1(t)\,\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\,\dot{x}_2(t)}{\sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}^{\,3}}$$