Analyis II

TUHH

VL 6, 12. Mai 2016

Parameterabhängige Integrale

Michael Hinze

Eigenschaften der Gamma Funktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dx \qquad (x > 0)$

i.) Es gilt $\quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (*)$

Nachweis gleich. Zunächst notieren wir die

Folgerung: $\quad \Gamma(n+1) = n! \quad$ für $n \in \mathbb{N}$,

denn mit $(*)$ gilt

$$\Gamma(n+1) \overset{x=n}{=} n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = n\,(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) = \dots$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1\cdot\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \lim_{T\to} \int_0^T e^{-t}\, dt = 1 .$$

Also $\Gamma(n+1) = n!$

Nachweis von $(*)$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\, dt$$

$$\int_\varepsilon^R \underset{u}{t^x}\, \underset{v'}{e^{-t}}\, dt = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + x\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt = (1) + (2)$$

$$(1) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(-R^x e^{-R} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon}\right) = 0$$

$$(2) = x \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\, \Gamma(x).$$

Γ-Funktion ist Beispiel eines Parameterintegrals (parameterabhängiges Integral). Parameter ist x.

Weitere Beispiele

i.) $J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)\, dt$ $\quad$ x Parameter

J_n heißt n-te Besselfunktion.

ii) Laplace Transformation einer Funktion f

$F(x) = \mathcal{L}(f)(x) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-xt}\, dt$ $\quad$ Parameter ist x.

iii) $\int \sin x\, t^2\, dt \overset{\text{Parameter ist } x}{=} \sin x \int t^2\, dt = \frac{1}{3} t^3 \sin x + C =: G(x)$

Fragen: a.) $G(x)$ stetig? $\quad$ (bzgl. x)

b.) $G(x)$ differenzierbar?

Bei iii) ist G stetig, weil $\sin$ stetig und diffbar, weil $\sin$ diffbar.

$G'(x) = \frac{1}{3} t^3 \cos x$

Allgemein: $G(x) := \int_a^b f(x,t)\, dt$ stetig bzw. diffbar bzgl x?

Stetigkeit: $\lim_{x \to \bar{x}} G(x) = G(\bar{x})$?

d.h. $\lim_{x \to \bar{x}} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b f(\bar{x},t)\,dt$? Grenzwertbildung und Integration vertauschbar ?

Ja, falls f stetig bzgl x und $f(x,t)$ Riemann integrierbar bzgl t.

Beweisidee:
$$\left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \sum_{j=1}^n f(x,\xi_j)\,\Delta t_j \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n \geq N_0$$
$$\left| \int_a^b f(\tilde{x},t)\,dt - \sum_{j=1}^n f(\tilde{x},\xi_j)\,\Delta t_j \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n \geq N_0$$

Wir wissen: f stetig bzgl x, d.h. zu $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ gibt es $\delta > 0$ $\forall_{|x-\tilde{x}|<\delta}$:
$$\left| \sum_{j=1}^n \left(f(x,\xi_j) - f(\tilde{x},\xi_j) \right) \Delta t_j \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Damit
$$\begin{aligned}
|G(x) - G(\tilde{x})| &= \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(\tilde{x},t)\,dt \right| \\
&\leq \underbrace{\left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \sum_{j=1}^n f(x,\xi_j)\,\Delta t_j \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \quad n \geq N_0} + \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n f(x,\xi_j)\,\Delta t_j - \sum_{j=1}^n f(\tilde{x},\xi_j)\,\Delta t_j \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \quad |x-\tilde{x}|<\delta} \\
&\quad + \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n f(\tilde{x},\xi_j)\,\Delta t_j - \int_a^b f(\tilde{x},t)\,dt \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \quad n \geq N_0} \\
&< \varepsilon, \quad |x-\tilde{x}| < \delta.
\end{aligned}$$

Ist f zusätzlich bzgl x stetig diffbar, so ist G diffbar und es gilt
$$G'(x) = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt$$
Nachweis analog zum Nachweis der Stetigkeit: betrachte $\frac{G(x+h) - G(x)}{h}$ und

füge Riemann Summe ein. Rest wie oben, SgL.

Bsp iii) wiederbesucht ; $G(x) := \int_0^b \underbrace{\sin x \, t^2}_{f(x,t)} \, dt$

$$\frac{d}{dx} f(x,t) = \cos x \, t^2$$

$$G(x) = \frac{1}{3} t^3 \sin x \Big|_{t=a}^{t=b}$$

$$G'(x) = \int_0^b \cos x \, t^2 \, dt = \frac{1}{3} \cos x \, t^3 \Big|_{t=a}^{t=b} .$$

Es können auch die Integrationsgrenzen von x abhängen:

$$G(x) = \int_{s(x)}^{h(x)} f(x,t) \, dt$$

Bsp : $G(x) = \int_{1+x}^{e^x} \cos x \, z \, dz = \frac{1}{2} \cos x \, z^2 \Big|_{z=s(x)}^{z=h(x)} = \frac{1}{2} \cos x \left(e^{2x} - (1+x)^2 \right)$

$h(x)$ $f(x,z)$ $s(x)$

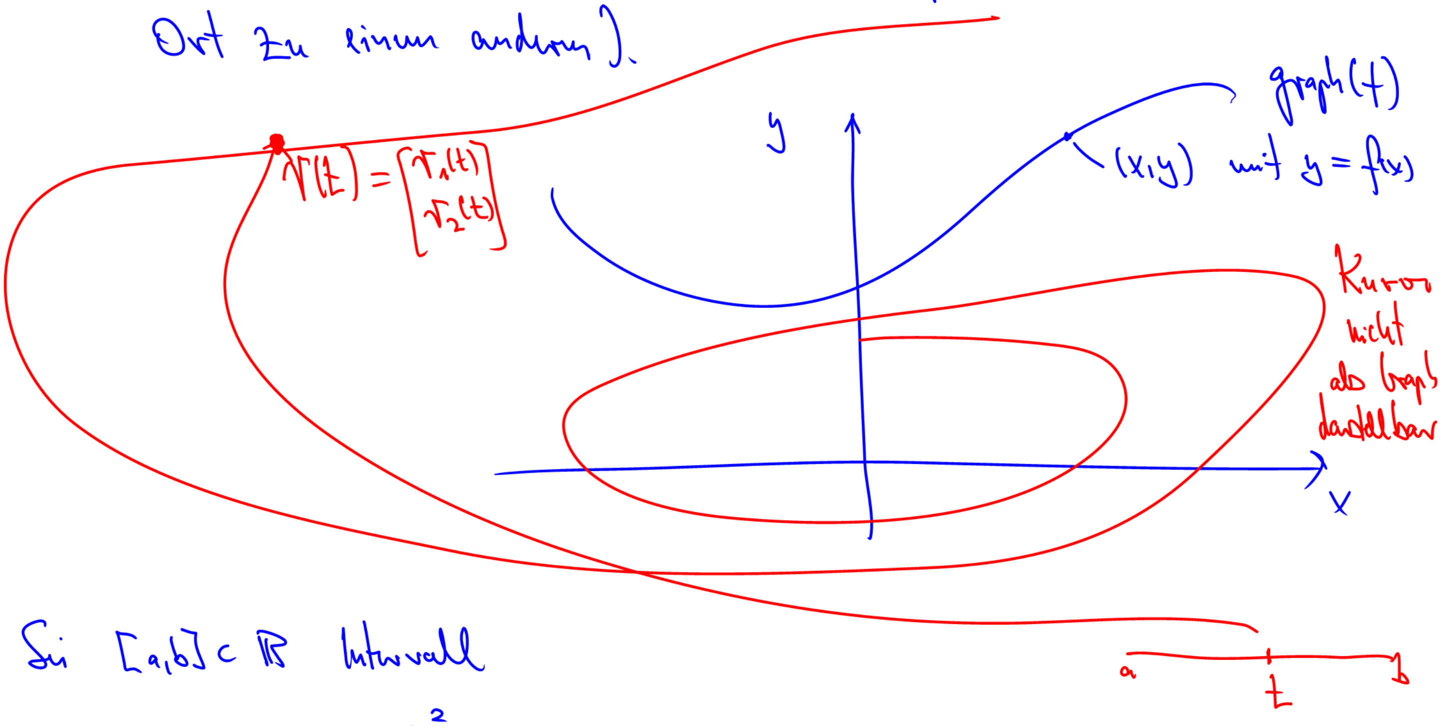
Damit gilt

$$G'(x) = -\frac{1}{2} \sin x \left(e^{2x} - (1+x)^2 \right) + \frac{1}{2} \cos x \left(2 e^{2x} - 2(1+x) \right)$$

Einsetz Probe
SgL
$$= \int_{1+x}^{e^x} \frac{d}{dt} f(x,z) \, dz + f(x, h(x)) \, h'(x) - f(x, s(x)) \, s'(x)$$

Dies ist die Leibniz Regel : $\frac{d}{dx} \int_{s(x)}^{h(x)} f(x,t) \, dt = \int_{s(x)}^{h(x)} \frac{d}{dx} f(x,t) \, dt + f(x,h(x)) \, h'(x) - f(x,s(x)) \, s'(x)$

Ziel: Berechne Arbeit entlang von Raumkurven (etwa in einem Automobilwerk (Robotereinsatz für den Transport von Bauteilen von einem Ort zu einem anderen).

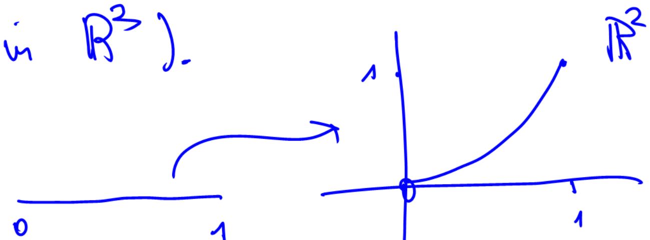


Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Intervall

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix}$$

heißt ebene Kurve (weil Kurve in $\mathbb{R}^2$).

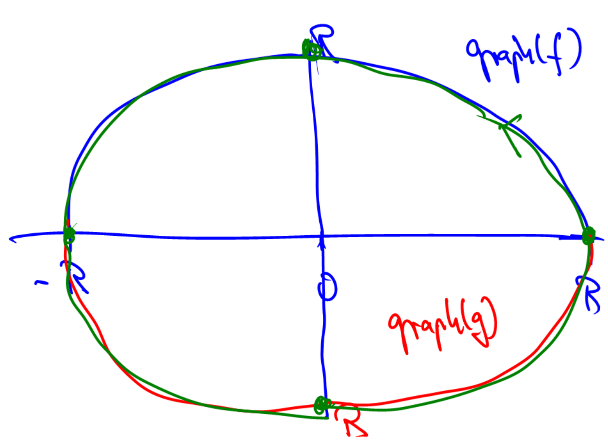
Bsp i.) $a = 0,\ b = 1,\quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$



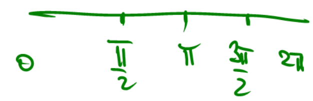
Parabelstück, Graph von $f(x) = x^2$ in $[0,1]$.

ii) Kreis mit Radius R

$$f : [-R,R] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{R^2 - x^2}$$



$$g : [-R,R] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\sqrt{R^2 - x^2}$$



iii) Eleganter geht ii) mit

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$t \mapsto R \begin{pmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$$