Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

- **Satz 2.42: Sei $f(x) \geq 0$ und monoton fallend.**

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

- **Satz 2.43: $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq f(x)$ auf $[a,\infty)$, dann:**

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent } \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergiert .}$$

- **Satz 2.44: $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.**
- **Satz 2.45: f sei über jedes beschränkte Teilintervall von $[a,\infty)$ ($a > 0$) integrierbar, $c \geq a$ und $M > 0$.**
  - a) $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ **mit** $\alpha > 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ **konvergent,**
  - b) $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ **mit** $\alpha \leq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ **divergent.**

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale, Beispiele

- **Gamma Funktion (interpoliert die Fakultät)**

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0,$$

- **Bessel Funktionen (Ausbreitung von Wellen, Schwingungsverhalten elastischer Körper)**

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)\, dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

- **Laplace Transformierte einer Funktion f (Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen in Lösung algebraischer Gleichungen)**

$$F(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-xt}\, dt.$$

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale

Satz 2.39: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)
Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ sei stetig bezüglich des Parameters x und integrierbar bezüglich der Veränderlichen y. Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad a \le x \le b,$$

a) **F ist in $[a, b]$ stetig,**
b) **ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung**

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{d\, f(x, y)}{d\, x}\, dy\ .$$

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale, Leibniz Regel

Satz 2.40: (Leibniz—Regel)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.39. Seien ferner $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy = $$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d\, f(x,y)}{d\, x}\, dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x)\ .$$