Analyis II
TUHH
VL 5, 6. Mai 2016

Uneigentliche und parameterabhängige Integrale

Michael Hinze

Uneigentliche Integrale

1.) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1 \\ \text{divergent}, & s \leq 1 \end{cases},$$

Wir wissen $$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_1^R \frac{1}{x^s}\,dx}$$

$$\overset{s\neq 1}{=} \frac{1}{1-s}\, x^{1-s}\Big|_1^R = \frac{1}{1-s}\left(R^{1-s} - 1^{1-s}\right) \quad (*)$$

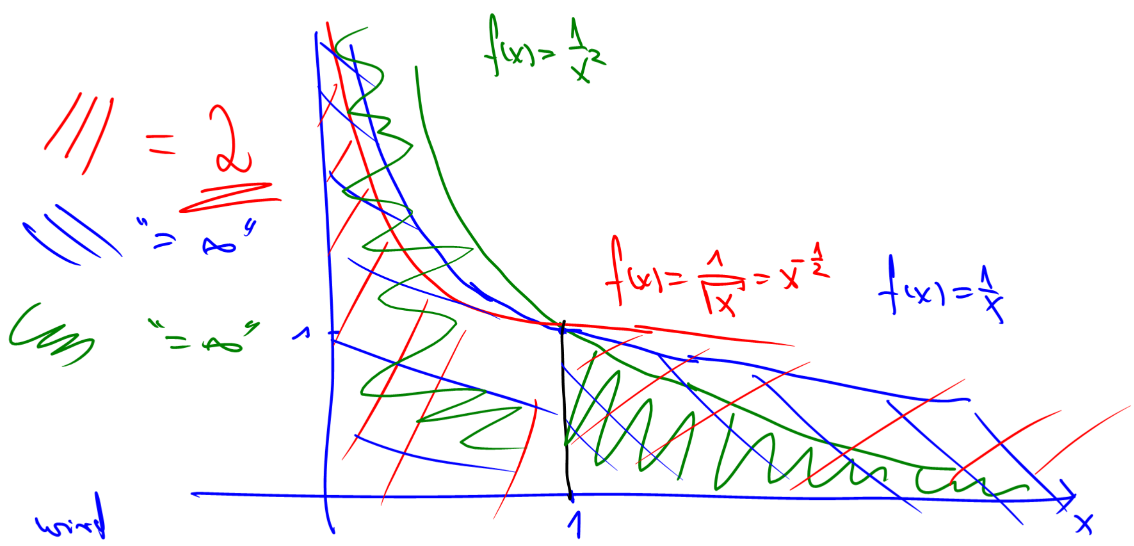
Also
$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-s}\left(R^{1-s} - 1^{1-s}\right) = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1 \\ \text{divergent}, & s < 1 \end{cases}$$

$s = 1$: in $(*)$ $\quad \ln R - \ln(1) \to \infty \quad (R \to \infty)$

divergenz

Analog: $$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & s < 1 \\ \text{divergent}, & s \geq 1 \end{cases}$$

Graphisch



Beachte: $f(x)=\frac{1}{x^s}$ wird häufig als Majorante/Minorante verwendet

$\rightarrow$ vgl. Bärwolff

Weitere Beispiele

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$$

Es gilt $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

$$\parallel$$

$$\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(0) - \lim_{R\to\infty}\arctan(-R)$$

$$+ \lim_{R\to\infty}\arctan(R) - \arctan(0)$$

$$= \pi$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to -1}\int_{\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 1}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \arcsin(0) - \lim_{\varepsilon \to -1} \arcsin(\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 1} \arcsin(\varepsilon) - \arcsin(0)$$

$$= \pi$$

Existenzaussagen für uneigentliche Integrale

Cauchy Kriterium

Frage: existiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$, falls f auf $[a,b]$ $\forall_{b \geq a}$ Riemann integrierbar?

In diesem Fall gilt: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist konvergent gdw $\Longleftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{X_\varepsilon > a} \; \forall_{X_\varepsilon < x_1 < x_2} : \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Bsp: $\int_0^\infty \sin x\,dx$ konvergent? Antwort: nein!

IA: $\int_0^\infty \sin x\,dx$ konvergent. Dann nach Cauchy Kriterium:

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es X_1 s.d. für alle $x_1 < x_2$ mit $x_1 > X_1$:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x\,dx \right| < 1 \; (= \varepsilon) \qquad (*)$$

Wähle jetzt $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2k\pi > X_1$. Setze $x_1 := 2k\pi$

und $x_2 := (2k+1)\pi$. Dann $\bar{X}_1 < x_1 < x_2$

Damit

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| = \left| \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \right| = 2 \quad \lightning \text{ zu } (*)$$

Fresnel Integral: $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$ konvergent?

Seien $0 < x_1 < x_2 < \infty$ gegeben. Dann

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)\, dx \overset{x^2 = t}{=} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt \overset{\text{p. Integr.}}{=} -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_{t=x_1^2}^{t=x_2^2} - \frac{1}{4} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}^3}\, dt$$

Damit

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)\, dx \right| \overset{|\cos t| \le 1}{\le} \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{4} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{1}{\sqrt{t}^3}\, dt$$

$$= \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = \frac{1}{x_1}$$

Damit $\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)\, dx \right| < \varepsilon$, falls $\frac{1}{x_1} < \varepsilon$.

Setze $\bar{X}_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt Cauchy Kriterium mit $\bar{X}_\varepsilon$, weil $\bar{X}_\varepsilon < x_1 < x_2$. Also Fresnel Integral konvergent.

Gamma Funktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$

$\Gamma(x)$ uneigentliches Integral bei "∞" $\forall x > 0$
|— |— bei "0" $0 < x < 1$

Frage: Konvergiert $\Gamma(x)$? Schreibe

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = (1) + (2)$$

Untersuche (1) und (2) separat:

$$(1) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

weil $e^{-t} \leq 1$ auf $[0,1]$

Fall i) $0 < x < 1$:
$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{t^x}{x}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} - \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\varepsilon^x}{x} = \frac{1}{x}$$

Fall ii) $x \geq 1$:
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{\text{stetig für } x \geq 1}\, dt \text{ existiert}$$

D.h. (1) konvergiert!

$$(2) = \lim_{T \to \infty} \int_1^T t^{x-1} e^{-t}\, dt \overset{\text{i) } 0<x<1}{\leq} \lim_{T \to \infty} \int_1^T e^{-t}\, dt = \frac{1}{e}$$

p. Integr. || ii) $x \geq 1$

$$\lim_{T \to \infty} \left\{ - t^{x-1} e^{-t}\Big|_1^T + (x-1) \int_1^T t^{x-2} e^{-t}\, dt \right\}$$

existiert

erneute partielle Integration (n-mal), bis $x-2-n \in (0,1) \Rightarrow$ Fall i)

Insgesamt: $\Gamma(x)$ konvergent.