Analyis II
TUHH
VL 3, 21. April 2016

Integrationsregeln, Partialbruchzerlegung

Michael Hinze

Beispiele Substitutions- und Produktregel der Riemann Integration

Merke: $$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \overset{z=f(t)}{\underset{dz=f'(t)\,dt}{=}} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{z}\,dz = \ln|z|\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \ln|f(t)|\Big|_a^b$$

i) $$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = ? \quad \text{mit } -1 \leq a < b \leq 1$$

$\|$ $x = \sin t$ $\quad dx = \cos t\,dt$ $\quad u = \arcsin a$, $v = \arcsin(b)$

$$\int_u^v \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_u^v \cos^2 t\,dt$$

NR: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$

$$= \int_u^v \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)\,dt = \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v$$

$$= \frac{1}{2}\sin t \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v$$

$$\overset{t=\arcsin x}{=} \frac{1}{2}\arcsin x\Big|_a^b + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b$$

weiter wie oben

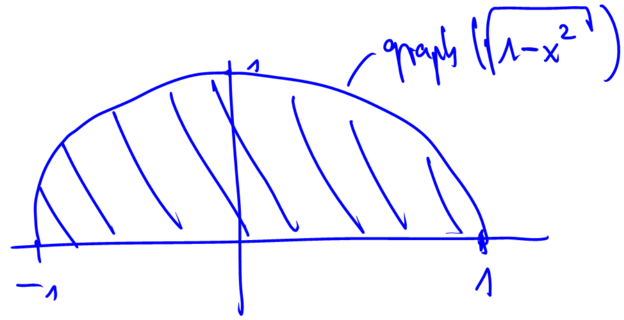
ii) $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \overset{x=\tan t}{\underset{dx=\frac{dt}{\cos^2 t}}{=}} \int \frac{1}{\cos^2 t\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2}\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

Folgerung aus i.) : Fläche des (halben) Einheitskreises berechnen

$$/// = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\arcsin(1)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} + 0\Big] = \frac{\pi}{2}$$



Noch ein Beispiel Produktintegration

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x} = \underset{f}{x}\,\underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1}\,\underset{g}{e^x} = (x-1)\,e^x + C$$

Vergangenes mal: $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C$

Integration rationaler Funktionen

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = ? \qquad \text{Es gilt } 1-x^2 = (1-x)(1+x)$$

Damit $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$ $\quad a = ?\ ,\ b = ?$

und $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = a \underbrace{\int \frac{1}{1+x}\,dx}_{\ln|1+x| + C_1} + b \underbrace{\int \frac{1}{1-x}\,dx}_{\ln|1-x| + C_1'}$ mit Integrationskonstanten C

Bestimmen a und b : $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a(1-x) + b(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{a+b+(b-a)x}{1-x^2}$

$\longrightarrow$ $b = a$ und $a+b = 1$, also $a = b = \frac{1}{2}$. Also

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

Allgemeine Situation

$$\int r(x)\,dx = ? \qquad \text{mit} \qquad r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad \text{rationale Funktion,}$$

wobei
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \,, \quad a_n \neq 0$$
$$q_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \,, \quad b_m \neq 0$$

Hier $\deg p_n = n$, $\deg q_m = m$ (deg englisch degree (Grad))

Es wird ausreichen, denn $n < m$ zu betrachten, denn für $n \geq m$ führt Polynomdivision zu

$$\frac{p_n}{q_m} = S_{n-m} + r$$

mit S_{n-m} Polynom vom Grade $n-m$ und r echt gebrochen rational.

$$\longrightarrow \int \frac{p_n(x)}{q_m(x)}\,dx = \underbrace{\int S_{n-m}(x)\,dx}_{\text{einfach ausrechenbar!}} + \underbrace{\int r(x)\,dx}_{=?}$$

Betrachte den Fall $n < m$ (ohne Einschränkung an die Allgemeinheit)

Dann
$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad \text{darstellbar mittels } \underbrace{\text{Partialbruch Zerlegung}}_{\text{PBZ}}$$

<u>Beispiel</u>
$$\int \frac{x+1}{x^4 - x}\,dx = ? \qquad r(x) = \frac{x+1}{x^4 - x} \quad \text{echt gebrochen rational}$$

$p_1(x) = x+1, \qquad q_4(x) = x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$

Ansatz

$$r(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

(auf Hauptnenner bringen und Zähler vergleichen)

$$\Longrightarrow \quad a = -1, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = -\frac{1}{3}$$

Also

$$\int r(x)\,dx = -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx}_{=?}$$

ist von der Form $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|} - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx}_{=?}$$

Substitution mit Tangens $\rightarrow$ SgL

Vorbereitung der PBZ

1.) $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$, so auch $\bar\alpha$, d.h. $p(\bar\alpha) = 0$ (gilt auch mit Vielfachheiten von Nullstellen)

$\alpha = a+ib \qquad \bar\alpha = a-ib$.

Klar, weil $\overline{p(\alpha)} = p(\bar\alpha)$

2.) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$: $(x-\alpha)(x-\bar\alpha) = x^2 - 2\operatorname{Re}\alpha\, x + |\alpha|^2 \quad (*)$

Polynom 2ten Grades mit reellen Koeffizienten.

3.) Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad (a_j \in \mathbb{R})$. p besitze

a.) r reelle Nullstellen $x_1, \dots, x_r$ mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_r$

b.) s komplexe Nullstellen $w_1, \dots, w_s$ mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_s$

c.) s – " – – " – $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s$ – " – – " – $\underbrace{\text{– " –}}_{\sum_{j=1}^{r} m_j + 2\sum_{j=1}^{s} n_j = n}$

Damit (Satz 2.29 Bärwolff)

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r} \cdot \ldots$$

$$\ldots (x - w_1)^{n_1} (x - w_2)^{n_2} \cdots (x - w_s)^{n_s} \cdot (x - \bar{w}_1)^{n_1} \cdots (x - \bar{w}_s)^{n_s}$$

mit $(*)$: $(x - w_j)(x - \bar{w}_j) = x^2 + p_j x + q_j$ mit $p_j = 2\,\mathrm{Re}\, w_j$, $q_j = |w_j|^2$

Damit

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j} \qquad (1)$$

mit $p_j = 2\,\mathrm{Re}\, w_j$, $q_j = |w_j|^2$ und $n = \sum_{j=1}^{r} m_j + 2 \sum_{j=1}^{s} n_s$.

Damit können wir die PBZ von

$r(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ mit $\deg p_n = n < \deg q_m = m$ angeben:

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(x - x_k)^j} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{b_{kj} x + c_{kj}}{(x^2 + p_k x + q_k)^j} ,$$

sie basiert auf der Zerlegung (1) für das Nennerpolynom q_m.

wobei sich die Koeffizienten a_{kj}, b_{kj} und c_{kj} aus p_n und q_m berechnen lassen. Ferner gilt

$$\int r(x)\,dx = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \int \frac{1}{(x-x_k)^j}\,dx + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \int \frac{b_{kj}x + c_{kj}}{(x^2+p_k x+q_k)^j}\,dx$$

Analyis II

TUHH

VL 3, 22. April 2016

Integrationsregeln, Partialbruchzerlegung

Michael Hinze

Beispiele zur Substitutionsregel und Produktintegration

Mutter $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \overset{z=f(t)}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{z}\,dz = \ln|z|\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \ln|f(t)|\Big|_a^b$

$\frac{dz}{dt} = f'(t)$ bzw $dz = f'(t)\,dt$

Bsp war $\displaystyle\int_a^b \tan t\,dt = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \ldots$ s. VL2

Betrachte $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$ mit $-1 \leq a < b \leq 1$

$\| \quad x = \sin t \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad dx = \cos t\,dt$

$u = \arcsin(a)$

$v = \arcsin(b)$

$$\int_u^v \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_u^v \cos^2 t\,dt$$

NR:

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t$

$$= \int_u^v \tfrac{1}{2}(\cos 2t + 1)\,dt$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin 2t\Big|_u^v + \tfrac{1}{2}t\Big|_u^v$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\Big|_u^v + \tfrac{1}{2}t\Big|_u^v \overset{t=\arcsin x}{=} \tfrac{1}{2}\Big[\arcsin x\Big|_a^b + x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b\Big].$$

weiter wie oben

Anwendung:

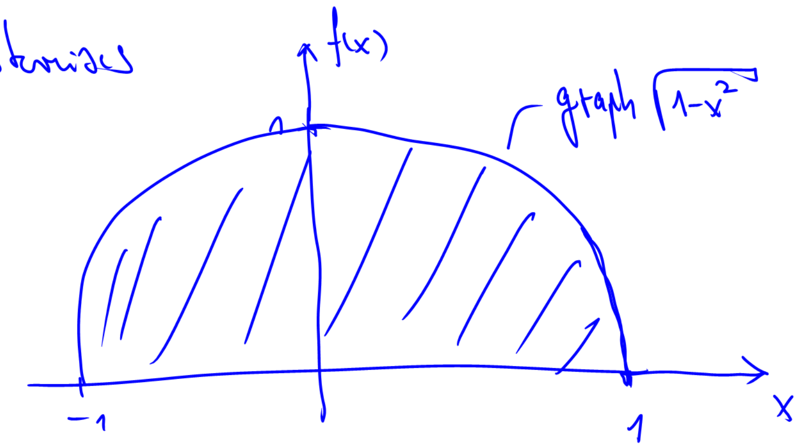
i.) $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \overset{x=\tan t}{=} \int \frac{1}{\cos^2 t\,(1+\tan^2 t)^2}\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \ldots$$

ii) Fläche des (halben) Einheitskreises

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = ///$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin(1) - \arcsin(-1) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$



Bsp Produktintegration

Integrationskonstante

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C \qquad \text{VL2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C \qquad \text{VL2}$$

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,dx = \underset{f}{x}\,\underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1}\,\underset{g}{e^x} = (x-1)e^x + C$$

Integration rationaler Funktionen

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad \text{mit} \quad p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad a_n \neq 0 \quad \text{und}$$

$$q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, \quad b_m \neq 0$$

ist rationale Funktion

$$\int r(x)\,dx = ?$$

Bsp $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ mit $p_n(x) = 1$, d.h. $n=0$
$q_m(x) = 1-x^2$, d.h. $m=2$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

$$= \frac{a(1+x) + b(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(a+b) + (a-b)x}{1-x^2}$$

d.h. $a = \frac{1}{2} = b$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C$$

Verallgemeinerung dieses Vorgehens $\leadsto$ Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen

$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$: Fall 1 : $n \geq m$ liefert $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \tilde{f}(x)$

mit S_{n-m} Polynom vom Grade $n-m$ und

$\tilde{f}$ echt gebrochen rational

Dann $$\int f(x)\,dx = \underbrace{\int S_{n-m}(x)\,dx}_{\text{"einfach"}} + \int \tilde{f}(x)\,dx$$

Also Beschränkung auf Integration echt gebrochen rationaler Funktion ausreichend. Im Folgenden

$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ mit $\underbrace{\deg}_{\text{Grad des Polynoms (von degree)}} p_n = n < \deg q_m = m$

Einige Eigenschaften von Polynomen mit reellen Koeffizienten

Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, .., n)$ $a_n \neq 0$.

i.) Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$, so auch $p(\bar{\alpha}) = 0$, d.h. $\bar{\alpha}$ ist auch Nullstelle von p.

$$0 = p(\alpha) = \overline{p(\alpha)} = \dots = p(\bar{\alpha})$$

$\alpha = a + ib$
$\bar{\alpha} = a - ib$

Aussage gilt auch für mehrfache Nullstellen

ii) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$: $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re}\alpha + |\alpha|^2$ mit $\alpha = a + ib$. Dann $a = \operatorname{Re}\alpha$, $b = \operatorname{Im}\alpha$, $|\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha = a^2 + b^2$.

iii) <u>Satz</u> $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ mit $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{R}$ $j = 0, 1, 2, .., n$

p besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 2.29 Bärwolff) n Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

p habe $\underbrace{r \text{ reelle Nullstellen}}_{x_1, \dots, x_r}$ und $\underbrace{2s \text{ komplexe Nullstelle}}_{\omega_1, \bar{\omega}_1, \omega_2, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_s, \bar{\omega}_s}$;

Dann gilt

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_r)^{m_r} (x - \omega_1)^{n_1} (x - \bar{\omega}_1)^{n_1} \dots (x - \omega_s)^{n_s} (x - \bar{\omega}_s)^{n_s}$$

Schreibe: $(x - \omega_j)(x - \bar{\omega}_j) \overset{ii)}{=} x^2 + p_j x + q_j$ mit $p_j = 2\operatorname{Re}\omega_j$, $q_j = |\omega_j|^2$

Damit

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{s} (x^2 + p_k x + q_k)^{n_k} \qquad (*)$$

wobei $n = \sum_{i=1}^{r} m_i + 2 \sum_{i=1}^{s} n_i$

Zurück zu $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ mit $\deg p_n = n < \deg q_m = m$

Es sei wie in (*)

$$q_m(x) = (x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_r)^{m_r} (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{n_s}$$

mit $\sum_{i=1}^{r} m_i + 2\sum_{i=1}^{s} n_s = m$. Dann besitzt f die eindeutige

Partialbruchzerlegung (PBZ)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(x-x_k)^j} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{b_{kj}x + c_{kj}}{(x^2+p_kx+q_k)^j}$$

Folgerung:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \int \frac{1}{(x-x_k)^j}\,dx + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \int \frac{b_{kj}x + c_{kj}}{(x^2+p_kx+q_j)^j}\,dx$$

Dabei können die Koeffizienten a_{kj}, b_{kj}, c_{kj} durch Koeffizientenvergleich über das Zählerpolynom bestimmt werden.

Bsp: $f(x) = \frac{x+1}{x^4-x}$ $\qquad p_1(x) = x+1$, d.h. $n=1$,

$q_4(x) = x^4 - x$, d.h. $m=4$

Zerlege $q_4(x) = x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$ (Polynomdivision)

$\longrightarrow$ $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$ mit $a=-1$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{3}$

$\longrightarrow$ $\int f(x)\,dx = a\ln|x| + b\ln|x-1| + \int \frac{cx+d}{x^2+x+1}\,dx$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = ?$$