# Buch Kap. 2.13 – Stetigkeit und Integrierbarkeit

**Satz 2.34: (Stetigkeit $\Longrightarrow$ Integrierbarkeit)**
**Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar.**

**Das gilt auch für stückweise stetige Funktionen, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler hebbarer Unstetigkeitsstellen oder Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen) stetig sind.**

# Buch Kap. 2.13 – Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Satz 2.35: (Mittelwertsätze der Integralrechnung)**

**a) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**
**Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in ]a, b[$ mit**

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

**b) (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)**
**Sind die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $g(x) > 0$ für alle $x \in ]a, b[$, so existiert ein $\xi \in ]a, b[$ mit**

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

# Buch Kap. 2.13 – Rechenregeln Integration

**Satz 2.36: Seien $f$ und $g$ integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt**

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, dx = c_1 \int_a^b f\, dx + c_2 \int_a^b g\, dx$,
- $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$,
- $\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$,
- $f \geq 0$ auf $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f\, dx \geq 0$,
- ist $f$ auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie $\int_a^b f\, dx = 0$, so folgt $f \equiv 0$.

## Buch Kap. 2.13 – Erster und 2ter Hauptsatz

**Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I$ stetig, dann ist die Funktion $F$, definiert durch**

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (x, a \in I),$$

**eine Stammfunktion von $f$.**

**Satz 2.38: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist $F$ Stammfunktion einer auf einem Intervall $I$ stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ , so gilt für beliebige $a, b \in I$**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: \int f(x)dx.$$

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Stammfunktion

**Definition 2.33 (wiederbesucht):**
**Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I$ definierte reellwertige Funktion.**

**Die differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft**

$$F' = f$$

**heißt Stammfunktion von $f$.**

**Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann heißt**

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad C = \text{const.},\ C \in \mathbb{R}$$

**unbestimmtes Integral der Funktion $f$. Die Konstante $C$ heißt Integrationskonstante.**

**Das unbestimmte Integral einer Funktion $f$ ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f$. Die Funktion $f(x)$ heißt Integrand.**

## Buch Kap. 2.13 – Integrationsregeln

**Satz 2.27: Seien $c_1$ und $c_2$ reelle Konstanten und $f$ und $g$ Funktionen, die Stammfunktionen besitzen, dann gilt**

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

**Satz 2.29: (Substitutionsregeln) Sei $f$ stetig auf dem Intervall $J$ und $\varphi$ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I$, wobei $\varphi(I) \subset J$ gilt und die Umkehrfunktion $\varphi^{-1}$ existiert. Dann gilt**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \text{ mit } t = \varphi(x)$$

**Satz 2.29': (Produktintegration) Ist $f$ stetig und $g$ stetig differenzierbar auf $I$ und ist $F$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $I$, so gilt**

$$F(x)g(x) = \int f(x)g(x) + F(x)g'(x) dx.$$

# Buch Kap. 2.13 – Substitutionsregeln

**Substitutionsregel 1:**

1) $\varphi(x)$ **wird durch** $t$ **ersetzt (substituiert),**
2) **wegen** $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ **bzw.** $dt = \varphi'(x)\,dx$ **wird** $\varphi'(x)\,dx$ **durch** $dt$ **ersetzt,**
3) **das Integral** $\int f(t)\,dt$ **wird berechnet (das sollte einfacher als die Berechnung des Integrals** $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ **sein, sonst wäre die Mühe umsonst!),**
4) $t$ **wird durch** $\varphi(x)$ **ersetzt (Rücksubstitution).**

**Substitutionsregel 2:**

1) $x$ **wird durch** $\varphi(t)$ **ersetzt (substituiert),**
2) **wegen** $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ **bzw.** $dx = \varphi'(t)\,dt$ **wird** $dx$ **durch** $\varphi'(t)\,dt$ **ersetzt,**
3) **das Integral** $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ **wird berechnet,**
4) $t$ **wird durch** $\varphi^{-1}(x)$ **ersetzt (Rücksubstitution).**